Série : B

N° d'ordre : 18

N° de série : 16

N° d'enregistrement au C.N.R.S.
A.O. 4333

Brest

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITE DE BRETAGNE OCCIDENTALE

U.E.R. SCIENCES DE LA MATIERE ET DE LA MER

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Léon-Claude CALVEZ

Contribution à l'étude des propriétés
de la transformation Z et de la transformation de Laguerre.
Applications à l'analyse des signaux et circuits.

Soutenue le 12 octobre 1973 devant la Commission d'Examen :

Président :

M. R. GENIN, Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale

Examinateurs :

MM. P. GRIVET, Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris-XI

E. ROUBINE, Professeur à l'Université de Paris-VI

P. FAURE, Professeur à l'Ecole des Mines de Paris

M. Y. BERNARD, Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers

J. PERESSE, Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale

---

1973

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545812_0008

Série : B

N° d'ordre : 18

N° de série : 16

N° d'enregistrement au C.N.R.S.
A.O. 4333

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITE DE BRETAGNE OCCIDENTALE

U.E.R. SCIENCES DE LA MATIERE ET DE LA MER

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Léon-Claude CALVEZ

Contribution à l'étude des propriétés
de la transformation Z et de la transformation de Laguerre.
Applications à l'analyse des signaux et circuits.

Soutenue le 12 octobre 1973 devant la Commission d'Examen :

Président :

M. R. GENIN, Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale

Examinateurs :

MM. P. GRIVET, Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris-XI

E. ROUBINE, Professeur à l'Université de Paris-VI

P. FAURE, Professeur à l'Ecole des Mines de Paris

M. Y. BERNARD, Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers

J. PERESSE, Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale

---

1973

A V A N T - P R O P O S

Nous sommes heureux d'exprimer notre gratitude à Monsieur le Professeur GENIN qui nous a suggéré ce travail et qui, par ses conseils avisés, prodigués avec une constante amabilité, nous a permis de le réaliser dans les meilleures conditions. Qu'il veuille bien trouver ici le témoignage de notre très profonde reconnaissance.

Nous sommes très sensible à la bienveillance de Monsieur le Professeur GRIVET, Membre de l'Institut, qui a bien voulu consacrer son attention à l'examen de cette Thèse et nous faire l'honneur de participer à notre Jury ; nous le prions d'accepter l'assurance de notre très profonde gratitude.

Nous exprimons également notre très vive gratitude à Monsieur le Professeur ROUBINE, Monsieur le Professeur FAURE, Monsieur le Professeur BERNARD et Monsieur le Professeur PERESSE qui ont bien voulu examiner notre travail et nous faire l'honneur de participer à notre Jury.

Il nous faut aussi dire toute notre reconnaissance à Madame le Professeur GENIN qui a suivi avec intérêt l'évolution de nos recherches.

Que Monsieur KERNEUZET, Assistant, trouve ici l'expression de nos vifs remerciements pour l'aide matérielle qu'il nous a apportée en programmant diverses formules sur le calculateur WANG 700.

Enfin, nous remercions également Madame TOLME, Secrétaire, Messieurs DESBOIS et ELIES, Techniciens au Laboratoire et Messieurs MARC et CASTEL de l'Atelier Offset.

S O M M A I R E

—

INTRODUCTION

Pages

P R E M I E R E P A R T I E

LA TRANSFORMATION Z : RAPPELS
ET PROPRIETES ORIGINALES

CHAPITRE PREMIER. - RAPPELS..... 3
1. Définition..... 3
2. Propriétés de la transformation Z..... 4
CHAPITRE II. - NOUVELLES PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION Z..... 9
1. Deuxième théorème du produit (Deuxième relation avec la transformation de Laplace)..... 9
2. Transformée de f(kn + q)..... 10
3. Transformée d'une fonction définie par une formule de type Rodrigues..... 12
4. Transformée d'une fonction définie par une formule de type Rodrigues généralisée..... 15
5. Généralisation du théorème de convolution réelle..... 18
6. Généralisation d'un théorème de Brown..... 21
7. Correspondances intégrales..... 22
8. Correspondances nécessitant l'inversion d'une transformée de Laplace..... 25
CHAPITRE III. - INVERSION DE LA TRANSFORMATION Z OU TRANSFORMATION Z^{-1}. RAPPELS..... 29
CHAPITRE IV. - METHODES D'INVERSION INEDITES (RELATIONS DE RECURRENCE). 35
1. La relation de récurrence comprend un nombre fini de termes..... 35
2. Le nombre de termes de la relation de récurrence croît avec n... 38

D E U X I E M E P A R T I E

SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA TRANSFORMATION Z EN THEORIE DES FONCTIONS SPECIALES

Pages

INTRODUCTION..... 43

CHAPITRE PREMIER. - POLYNOMES DE KONHAUSER..... 45
1. Définition..... 45
2. Polynômes $Z_n^s(x,k)$..... 46
3. Polynômes $Y_n^s(x,k)$..... 49
4. Développement d'une fonction en série de polynômes de Konhauser... 52

CHAPITRE II. - NOUVELLES FONCTIONS GENERATRICES ASSOCIEES A QUELQUES FONCTIONS SPECIALES..... 55
1. Polynômes de Chatterjea..... 55
2. Polynômes $A_n^s(x)$..... 56
3. Polynômes de Bessel..... 56
4. Polynômes et séries hypergéométriques..... 56
5. Polynômes de Gottlieb généralisés..... 58

T R O I S I E M E P A R T I E

TRANSFORMATION Z, TRANSFORMATION DE LAGUERRE ET TRANSFORMATION DE LAPLACE APPLICATIONS EN THEORIE DES SIGNAUX ET SYSTEMES

CHAPITRE PREMIER. - LA TRANSFORMATION DE LAGUERRE..... 63
1. Introduction et définitions..... 63
2. Relation entre transformée Z, transformée de Laguèrre et transformée de Laplace..... 64
3. Propriétés de la transformation de Laguerre..... 66
4. Inversion de la transformation de Laguerre..... 79
4.1. Théorème d'inversion..... 79
4.2. Etude de l'erreur lorsque la série d'inversion est limitée aux N premiers termes..... 82

Pages

CHAPITRE II. - RELATIONS ENTRE TRANSFORMATION DE LAGUERRE ET TRANSFORMATION DE POISSON..... 91

1. Rappels sur la transformation de Poisson..... 91

2. Sur quelques propriétés inédites..... 92

CHAPITRE III. - INVERSION NUMERIQUE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE A L'AIDE DES POLYNOMES DE LAGUERRE..... 97

1. Description de la méthode..... 98

1.1. Formules d'inversion..... 98

1.2. Considérations pratiques..... 99

2. Cas particulier des fractions rationnelles..... 102

3. Résultats numériques..... 104

CHAPITRE IV. - APPLICATIONS DE LA TRANSFORMATION DE LAGUERRE EN THEORIE DES SIGNAUX ET SYSTEMES..... 125

1. Description de la méthode..... 126

1.1. Principe..... 126

1.2. Détermination du spectre d'un signal..... 127

1.3. Détermination de $\{h_n(\alpha,\beta)\}$..... 133

2. Résultats numériques..... 137

CHAPITRE V. - INVERSION NUMERIQUE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE A L'AIDE D'UNE CERTAINE CLASSE DE FONCTIONS $\varphi_n(t)$..... 147

1. Généralités..... 147

2. Développement de l'original en série de Mac Laurin..... 149

3. Développement de l'original en série de Neumann..... 150

4. Exemple d'exploitation des propriétés de la transformation Z..... 153

5. Conclusion..... 156

CHAPITRE VI. - PREVISION D'UN DEPASSEMENT DANS LA REPONSE D'UN CIRCUIT LINEAIRE..... 159

Critère..... 160

Exemples numériques..... 164

CONCLUSION..... 169

BIBLIOGRAPHIE..... 171

ANNEXE..... 177

Sur une propriété des fonctions $\pi_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ 177

Principales notations figurant dans les tables annexes..... 181

Table de transformées Z..... 183

Table de transformées de Laguerre..... 185

I N T R O D U C T I O N

Au cours des trois dernières décennies la théorie relativement récente des systèmes discrets, encore appelés systèmes à échantillonnage, a retenu l'attention de nombreux auteurs. Diverses méthodes ont été proposées pour l'étude de tels systèmes mais l'une d'entre elles, basée sur la transformation Z, semble s'être imposée. En bref, on peut dire que la transformation Z représente pour les suites discrètes l'équivalent de la transformation de Laplace pour les fonctions continues.

On connaît l'utilité et le succès du calcul symbolique basé sur la transformation de Laplace dans divers domaines de la physique et des mathématiques. De même, la transformation Z, technique de calcul concise, sûre et efficace peut être appliquée avec succès dans diverses branches de la physique et de la physique mathématique. Cependant, une grande partie des travaux actuellement publiés au sujet de cette transformation concerne essentiellement les systèmes à échantillonnage ; aussi, convaincu des possibilités nouvelles qu'offrait la transformation Z, nous avons cherché à étendre son domaine d'application. Notre exposé se décompose en trois parties.

Dans la première partie, après un rappel sommaire des diverses propriétés de la transformation Z, assez éparses dans la littérature, nous établirons plusieurs propriétés nouvelles pour la dite transformation.

Dans la deuxième partie, à l'aide de quelques exemples originaux relatifs aux fonctions spéciales de la physique mathématique, nous illustrerons la systématisation et l'efficacité qui résultent de l'usage du symbolisme de la transformation Z dans ce domaine. Le cas des polynômes de Konhauser, susceptibles d'application en physique et peu étudiés par ailleurs, retiendra particulièrement notre attention.

Dans la troisième partie,une nouvelle transformation dite de Laguerre sera introduite et étudiée. Une relation fondamentale entre transformée Z, transformée de Laguerre et transformée de Laplace d'une fonction étant établie, d'intéressantes applications telles que l'inversion numérique de la transformation de Laplace à l'aide des polynômes de Laguerre et l'élaboration d'une représentation discrète à partir d'un modèle continu seront étudiées ; une généralisation de la relation fondamentale précédente et quelques unes de ses applications seront examinées. Enfin, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un dépassement dans la réponse d'un circuit linéaire sera établie.

P R E M I E R E P A R T I E

LA TRANSFORMATION Z : RAPPELS ET PROPRIETES ORIGINALES

CHAPITRE PREMIER

RAPPELS

1 - DEFINITION

Soit f(n) une fonction de la variable discrète $n \in N = \{0,1,2,\ldots\}$, supposée identiquement nulle pour les valeurs négatives de n. La transformée Z de f(n) est alors la fonction de la variable complexe z notée F(z) et ainsi définie

$$Z\{f(n)\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f(n)$$

Nous admettrons que la série converge absolument pour $|z| > R_f$. Nous écrirons symboliquement

$$f(n) \dashv F(z)$$

ou encore

$$F(z) \vdash f(n) = Z^{-1}\{F(z)\}$$

F(z) peut fréquemment s'écrire sous une forme compacte qui est la somme de la série ; considérons par exemple la fonction de la variable discrète n, $f(n)=a^n$ et supposons $f(n) \equiv 0$ si $n < 0$.

Dans ce cas

$$Z\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

La somme de la série géométrique existe pour $|z| > a$, d'où la correspondance

$$a^n \dashv \frac{z}{z-a}$$

Ainsi, des transformées Z peuvent être calculées directement à partir de la relation de définition mais les propriétés qui seront énoncées ci-après facilitent ces calculs. Des correspondances glanées dans les diverses tables de transformées Z de la littérature ont été rassemblées dans une table annexe où figurent également de nouvelles transformées Z.

Il convient de noter, dès à présent, que la transformée Z n'est autre que la fonction génératrice définie en Mathématiques.

2 - PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION Z

Nous supposerons que les transformées Z des fonctions envisagées existent et, sauf indication contraire, une lettre minuscule représentera la fonction originale et la majuscule correspondante la fonction transformée ; ainsi, nous noterons

$$f(n) \dashv F(z) \quad , \quad g(n) \dashv G(z)$$

Ayant rappelé, une fois pour toutes, que les fonctions originales sont supposées identiquement nulles pour les valeurs négatives de la variable n, nous allons d'abord énoncer brièvement les propriétés ayant fait l'objet de publications ou figurant dans des ouvrages généraux traitant de la transformation Z, tels par exemple ([1]) ([2]) et ([3]) ; ensuite, au chapitre II, nous exposerons de façon plus détaillée quelques propriétés originales.

2.1 - Linéarité de la transformation

(I', 1)
$$\begin{cases} f(n) + g(n) \dashv F(z) + G(z) \\ a f(n) \dashv a F(z) \end{cases}$$

2.2 - Amortissement

(I.2)
$$a^{-n} f(n) \dashv F(az)$$

2.3 - Décalage

Si k est un entier positif

(I,3)
$$f(n-k) \dashv z^{-k} F(z)$$

(I,4)
$$f(n+k) \dashv z^{k} F(z) - \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-j} f(j)$$

2.4 - Sommation

La sommation est un procédé qui correspond à l'intégration

(I,5)
$$\sum_{j=0}^{n} f(j) \dashv \frac{z}{z-1} F(z)$$

2.5 - Convolution réelle

La propriété suivante est connue sous le nom de propriété de convolution réelle

$$(I,6)\qquad \begin{cases} f(n) \boxtimes g(n) \dashv\vdash F(z)\ G(z) \\ f(n) \boxtimes g(n) = \sum_{j=0}^{n} f(j)\, g(n-j) = \sum_{j=0}^{n} f(n-j)\, g(j) \end{cases}$$

2.6 - Transformée de nf(n)

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la relation de définition de la transformation

$$(I,7)\qquad n f(n) \dashv\vdash -z \frac{dF(z)}{dz}$$

et, par suite,

$$(I,8)\qquad n^k f(n) \dashv\vdash (-1)^k \left(z \frac{d}{dz}\right)^k F(z) \qquad k \in N$$

2.7 - Transformée de $\frac{n!}{(n-k)!}$ f(n) et transformées similaires

La correspondance du paragraphe précédent peut être généralisée de diverses manières ; on a, entre autres, les propriétés suivantes :

$$(I,9)\qquad \frac{n!}{(n-k)!} f(n) \dashv\vdash (-1)^k z^{-k} \left(z^2 \frac{d}{dz}\right)^k F(z) = (-1)^k z \frac{d^k}{dz^k}\left[z^{k-1} F(z)\right] \qquad k \in N$$

$$(I,10)\qquad \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} f(n) \dashv\vdash (-1)^k z^k \frac{d^k F(z)}{dz^k} \qquad k \in N$$

$$(I,11)\qquad \frac{n!}{(n-k)!} f(n-k+1) \dashv\vdash (-1)^k z \frac{d^k F(z)}{dz^k} \qquad k \in N^* = \{1,2,3,\dots\}$$

2.8 - Transformée de $\frac{f(n)}{n+\alpha}$, $\alpha \geq 0$

$$(I,12)\qquad \frac{f(n)}{n+\alpha} \dashv\vdash z^\alpha \int_z^\infty \frac{F(u)}{u^{\alpha+1}}\, du \qquad \alpha > 0$$

dans le cas particulier $\alpha = 0$, on doit avoir $f(0) = 0$; il convient alors de préciser la vraie valeur $\beta = \left[\frac{f(n)}{n}\right]_{n=0}$ auquel cas

$$(I,13)\qquad \frac{f(n)}{n} \dashv\vdash \beta + \int_z^\infty \frac{F(u)}{u}\, du$$

2.9 - Transformée de $\Delta^n f(0)$

Considérons l'opérateur Δ ainsi défini

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

$$\Delta^k f(n) = \Delta\left[\Delta^{k-1} f(n)\right] \qquad \Delta^0 f(n) = f(n) \qquad k \in N$$

On montre alors (4)

$$(I,14)\qquad \Delta^n f(0) \dashv\vdash \frac{z}{z+1} F(z+1)$$

2.10 - Transformée de $\Delta^k f(n)$

A l'aide de (I, 4) on établit

$$\Delta^k f(n) \dashv (z-1)^k F(z) - z \sum_{j=0}^{k-1} (z-1)^{k-1-j} \Delta^j f(0) \qquad k \in \mathbb{N}^* \tag{I,15}$$

2.11 - Transformée de $\nabla^k f(n)$

Considérons l'opérateur ∇ ainsi défini

$$\nabla f(n) = f(n) - f(n-1)$$

$$\nabla^k f(n) = \nabla \left[\nabla^{k-1} f(n) \right] \qquad \nabla^0 f(n) = f(n) \qquad k \in \mathbb{N}$$

On a alors

$$\nabla^k f(n) \dashv (1 - z^{-1})^k F(z) \tag{I,16}$$

2.12 - Transformée de $\frac{f(n)}{n!}$ (première relation)

Compte tenu de (I, 14), la correspondance suivante permet, dans certains cas, de calculer la transformée de $\frac{f(n)}{n!}$ [4]

$$\frac{f(n)}{n!} \dashv e^{\frac{1}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \frac{\Delta^n f(0)}{n!} = e^{\frac{1}{z}} Z\left\{ \frac{\Delta^n f(0)}{n!} \right\} \tag{I,17}$$

2.13 - Généralisation du théorème de sommation

Lemme : si k est un entier positif donné et si g(n) est une fonction définie de la manière suivante

$$g(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{k}\right) & n = jk \\ 0 & n \neq jk \end{cases} \qquad j \in \mathbb{N}$$

on a alors la correspondance

$$g(n) \dashv F(z^k) \tag{I,18}$$

en effet,

$$g(n) \dashv \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{jk}{k}\right) z^{-jk} = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) (z^k)^{-j} = F(z^k)$$

On en déduit alors simplement la correspondance suivante qui a été établie par une autre méthode [5]

$$\sum_{j=0}^{\leqslant \frac{n}{k}} f(j) \dashv \frac{z}{z-1} F(z^k) \tag{I,19}$$

en effet

$$\sum_{j=0}^{\leqslant \frac{n}{k}} f(j) = \sum_{j=0}^{n} g(j)$$

pour achever la démonstration il suffit de faire usage de (I, 5).

2.14 - Variable indépendante

Soit F(z,x) la transformée Z de f(n,x) ou x désigne une variable indépendante ou une constante. On a alors

(I,20) $$\frac{\partial}{\partial x} f(n,x) \dashv \frac{\partial}{\partial x} F(z,x)$$

(I,21) $$\int_{x_0}^{x_1} f(n,x)\,dx \dashv \int_{x_0}^{x_1} F(z,x)\,dx$$

(I,22) $$\lim_{x \to x_0} f(n,x) \dashv \lim_{x \to x_0} F(z,x)$$

2.15 - Première relation avec la transformation de Laplace

Soit f(n) une fonction de la variable discrète n telle que f(o) = o et supposons qu'il soit possible de définir une fonction $\tilde{f}(t)$ de la variable continue t, coïncidant avec f(n) lorsque t = n c'est-à-dire telle que

$$\tilde{f}(n) = f(n) \qquad \forall\, n \in N$$

Si $\tilde{f}(t)$ admet une transformée de Laplace $\hat{\tilde{f}}(p)$ et si de plus cette transformée de Laplace $\hat{\tilde{f}}(p)$ est une fraction rationnelle en p de la forme

$$\hat{\tilde{f}}(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

ayant k pôles simples p_1, p_2, ..., p_j, ... p_k, on démontre [(1), p. 55]

(I,23) $$f(n) \dashv \sum_{j=1}^{k} \frac{N(p_j)}{D'(p_j)} \frac{1}{1 - z^{-1} e^{p_j}} \qquad D'(p) = \frac{dD(p)}{dp}$$

2.16 - Premier théorème du produit

Si $$f(n) \dashv F(z) \qquad |z| > R_f$$
$$g(n) \dashv G(z) \qquad |z| > R_g$$

la transformée Z du produit f(n) g(n) est donnée par l'intégrale dans le plan complexe [(2), p 58] suivante

(I,24) $$f(n)\,g(n) \dashv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \xi^{-1} G(\xi) F(z\xi^{-1})\,d\xi \qquad R_g < |\xi| < |z| R_f$$

On en déduit que si F(z) existe pour |z| = 1 ($R_f < 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} [f(n)]^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} z^{-1} F(z) F(z^{-1})\,dz$$

CHAPITRE II

NOUVELLES PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION Z

Les propriétés que nous allons établir ci-après sont, à notre connaissance, nouvelles. Cependant, quelques résultats connus peuvent s'en déduire comme simples cas particuliers : lorsqu'il en sera ainsi nous le signalerons.

1 - DEUXIEME THEOREME DU PRODUIT (deuxième relation avec la transformation de Laplace)

Considérons deux fonctions de la variable discrète n notées f(n) et g(n). Supposons qu'il existe une fonction continue $\tilde{f}(t)$ de la variable continue $t > o$, coïncidant avec f(n) $\forall t = n \in N^*$ et dont la limite lorsque $t \longrightarrow o$ par valeurs positives existe et est égale à f(o) c'est-à-dire

$$\tilde{f}(n) = f(n) \qquad n \geq 1$$

$$\tilde{f}(+o) = f(o)$$

si la transformée de Laplace $\hat{\tilde{f}}(p)$ de $\tilde{f}(t)$ existe on a alors

$$f(n)\,g(n) \dashv \frac{f(o)\,g(o)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\tilde{f}}(p)\,G(z e^{-p})\,dp \quad , \quad c > \tilde{p}_o, \ |z| > Re^c, \ R > R_g \tag{I,25}$$

où $\tilde{p}_o$ désigne l'abscisse de convergence absolue de $\hat{\tilde{f}}(p)$.

Démonstration

Pour $c > \tilde{p}_o$, l'intégrale complexe d'inversion de $\hat{\tilde{f}}(p)$ s'écrit

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}\,\hat{\tilde{f}}(p)\,dp \qquad t > 0$$

$$\frac{\tilde{f}(+0)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\tilde{f}}(p)\,dp$$

et par conséquent

$$f(n) = \tilde{f}(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pn}\,\hat{\tilde{f}}(p)\,dp \qquad n \geq 1$$

l'existence de $\hat{\tilde{f}}(p)$ pour p = c impose l'existence d'un nombre fini positif M_1 tel que

$$|\tilde{f}(t)| < M_1 e^{ct}$$

donc

$$|f(n)| < M_1 e^{cn}$$

et comme G(z) converge pour $|z| = R > Rg$

$$|g(n)| < M_2 R^n$$

ainsi, pour $|z| > Re^c$, $R > Rg$

$$|z^{-n} f(n) g(n)| < M_1 M_2 b^n \quad , \quad b = \frac{Re^c}{|z|} < 1$$

il en résulte que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} f(n) g(n) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-n} g(n) e^{pn} \hat{\tilde{f}}(p)\, dp$$

converge absolument . Compte tenu des hypothèses on peut permuter les signes $\sum$ et $\int$ d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} f(n) g(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (ze^{-p})^{-n} g(n) \right] \hat{\tilde{f}}(p)\, dp$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f(n) g(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G(ze^{-p}) \hat{\tilde{f}}(p)\, dp - \frac{g(0)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\tilde{f}}(p)\, dp + f(0) g(0)$$

ce qui achève la démonstration puisque

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\tilde{f}}(p)\, dp = \frac{\tilde{f}(+0)}{2} = \frac{f(0)}{2}$$

Ainsi, la connaissance de la transformée de Laplace $\hat{\tilde{f}}(p)$ et de la transformée Z de g(n) permet théoriquement de calculer la transformée Z du produit f(n) g(n).

Notons que pour le choix particulier g(n) = 1 soit $G(z) = \frac{z}{z-1}$ on retrouve un résultat connu [(2), p. 71]

(I,26)
$$f(n) \dashv \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{\tilde{f}}(p)}{1 - e^p z^{-1}}\, dp + \frac{f(0)}{2}$$

2 - TRANSFORMEE DE f(kn + q)

2.1 - Cas général

Proposition

Si

$$f(n) \dashv F(z)$$

on a la correspondance

(I,27) $$f(kn+q) \dashv F_{k,q}(z) = \frac{1}{k} z^{\frac{q}{k}} \sum_{j=1}^{k} e^{ij\frac{2\pi}{k}q} F\left(e^{ij\frac{2\pi}{k}} z^{\frac{1}{k}}\right) \qquad 0 \leq q < k \in N^* \quad |z| > (R_f)^k$$

Démonstration

$$F_{k,q}(z) = \frac{1}{k} z^{\frac{q}{k}} \sum_{j=1}^{k} e^{ij\frac{2\pi}{k}q} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-inj\frac{2\pi}{k}} z^{-\frac{n}{k}} f(n)$$

Considérons la série des modules

$$\overline{F}_{k,q}(z) = \frac{1}{k} |z|^{\frac{q}{k}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{-\frac{n}{k}} |f(n)|$$

mais

$$|z| > (R_f)^k \Longrightarrow |z|^{\frac{1}{k}} > R_f$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f(n)$ converge absolument pour $|z| > R_f$ aussi $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-\frac{n}{k}} f(n)$ converge absolument pour $|z| > (R_f)^k$; ceci établit la convergence absolue de $F_{k,q}(z)$ puisque k est un entier fini. Nous pouvons donc modifier l'ordre des sommations

$$F_{k,q}(z) = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{\infty} z^{\frac{q-m}{k}} f(m) \sum_{j=1}^{k} e^{ij\frac{2\pi}{k}(q-m)}$$

notons que la deuxième somme est nulle sauf si q-m = - nk($n \in N$) auquel cas

$$\sum_{j=1}^{k} e^{-ij(2\pi n)} = k$$

ainsi seuls subsisteront les termes de rang m tel que q-m = - nk soit

$$m = kn + q$$

et par conséquent

$$F_{k,q}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f(kn+q)$$

relation qui établit la proposition.

Remarquons que l'hypothèse q < k n'est point restrictive vu qu'il est toujours possible de s'y ramener en changeant n en n + k' et en faisant appel à la propriété dite de décalage. Notons que si q = o, on retrouve un résultat connu [(3), p. 149] .

Si k = 2 les correspondances sont particulièrement simples

(I,27 a) $$f(2n) \dashv \frac{F(\sqrt{z}) + F(-\sqrt{z})}{2}$$

(I,27 b) $$f(2n+1) \dashv \sqrt{z}\, \frac{F(\sqrt{z}) - F(-\sqrt{z})}{2}$$

il en est de même si k = 4, q = 0, 1, 2, 3 ; par exemple

(I,27 c) $$f(4n) \dashv \frac{F(z^{\frac{1}{4}}) + F(-z^{\frac{1}{4}}) + F(iz^{\frac{1}{4}}) + F(-iz^{\frac{1}{4}})}{4}$$

2.2 - Cas particulier

Proposition

Si $$f(n) \dashv F(z)$$

et si f(n) jouit de la propriété particulière

$$f(n) = \begin{cases} f(km+q) & n = km+q \quad k \in \mathbb{N}^* \quad q \in \mathbb{N} \\ & \qquad\qquad m = 0, 1, 2, \cdots \\ 0 & n \neq km+q \end{cases}$$

on a alors la correspondance suivante

(I,28) $$f(kn+q) \dashv z^{\frac{q}{k}} F(z^{\frac{1}{k}}) \qquad |z| > (R_f)^k$$

Démonstration

Compte tenu de la propriété particulière de f(n)

$$F(z) = z^{-q} \sum_{m=0}^{\infty} f(km+q)\, z^{-mk} \qquad |z| > R_f$$

par conséquent, si $|z| > (R_f)^k$

$$z^{\frac{q}{k}} F(z^{\frac{1}{k}}) = \sum_{m=0}^{\infty} f(km+q)\, z^{-m} = Z\left\{f(kn+q)\right\}$$

3 - TRANSFORMEE D'UNE FONCTION DEFINIE PAR UNE FORMULE DE TYPE RODRIGUES

Bien que de nombreuses fonctions spéciales de la physique mathématique soient naturellement concernées par les résultats de ce paragraphe et des suivants, les correspondances établies sont suffisamment générales pour déborder de ce cadre et conduire à de nombreuses relations inédites. Nous avons résumé les résultats essentiels dans une note aux Comptes Rendus ([6]).

Considérons une fonction de la variable discrète n que nous noterons ici $f_n(x)$ et ainsi définie

(I,29) $$f_n(x) = \frac{1}{n!} D^n \left\{ [X(x)]^n f(x) \right\}$$

où, suivant l'usage, D désigne l'opérateur $\frac{d}{dx}$.

Nous commencerons par rappeler une propriété très puissante ([7]) qui semble demeurée inutilisée tant dans les travaux relatifs à la transformation Z que dans ceux relatifs aux fonctions génératrices. La variable complexe sera notée w.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine contenant une courbe simple fermée γ entourant le point x et limitant un domaine $\delta \subset \mathfrak{D}$.

Si X(w) est une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$, ne s'annulant ni sur γ ni en x et si f(w) est holomorphe dans δ alors pour

(I,30) $$|z| > \operatorname{Max}_{\gamma} \left| \frac{X(w)}{w-x} \right|$$

on a

(I,31) $$\frac{1}{n!} D^n \left\{ [X(x)]^n f(x) \right\} \dashv \frac{z f[X^*(z)]}{z - X'[X^*(z)]} \qquad X'(x) = DX(x)$$

où X*(z) est la racine de l'équation en X*

(I,32 a) $$X(X^*) = (X^* - x) z$$

vérifiant

(I,32 b) $$\lim_{z \to \infty} X^*(z) = x$$

La racine X*(z) ne s'exprimant sous forme compacte que dans quelques cas particuliers, il est intéressant de noter la relation générale suivante

(I,33) $$X^*(z) = x + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \frac{1}{n!} D^{n-1} [X(x)]^n$$

en effet, si $\varphi(w)$ est holomorphe dans δ, d'après une formule due à Lagrange ([7])

(I,34) $$\varphi[X^*(z)] = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \frac{1}{n!} D^{n-1} \left\{ [X(x)]^n \varphi'(x) \right\}$$

il suffit de considérer $\varphi(w) = w$ pour établir (I, 33).

Les cas particuliers X(x) = 1, x, x^2, $x^2 - 1$, x^{-1}, se rencontrent fréquemment dans la théorie des fonctions spéciales. La résolution de (I, 32) pour chacun de ces cas conduit aux correspondances suivantes

(I,35) $$\frac{1}{n!} D^n [f(x)] \dashv f(x + z^{-1})$$

(I,36) $$\frac{1}{n!} D^n [x^n f(x)] \dashv \frac{z}{z-1} f\left(x \frac{z}{z-1}\right)$$

(I,37) $$\frac{1}{n!} D^n [x^{2n} f(x)] \dashv (1 - 4xz^{-1})^{-\frac{1}{2}} f\left[\frac{z}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4xz^{-1}}\right)\right]$$

(I,38) $$\frac{1}{n!} D^n [(x^2-1)^n f(x)] \dashv (1 - 4xz^{-1} + 4z^{-2})^{-\frac{1}{2}} f\left[\frac{z}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4xz^{-1} + 4z^{-2}}\right)\right]$$

(I,39) $$\frac{1}{n!} D^n [x^{-n} f(x)] \dashv \left[1 + \frac{x^2}{4} z \left(1 - \sqrt{1 + 4x^{-2} z^{-1}}\right)^2\right]^{-1} f\left[\frac{x}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4x^{-2} z^{-1}}\right)\right]$$

Les quatre premières correspondances ont été établies récemment et indépendamment par CHATTERJEA ([8]) qui a également envisagé le cas où X(x) est un polynôme en x.

Le cas particulier $X(x) = x^{\sigma+1}$ bien que conduisant à des résultats moins simples que les précédents est cependant digne d'intérêt en raison de ses conséquences. Lorsque σ est quelconque (I, 32) ne permet pas de calculer une expression compacte pour $X^*(z)$; mais comme

$$D^{n-1}\left[x^{(\sigma+1)n}\right] = (\sigma n+2)_{n-1}\, x^{\sigma n+1} \qquad n \geqslant 1$$

où, suivant l'usage

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\cdots(a+k-1) \quad , \quad (a)_0 = 1$$

on a d'après (I,33)

$$X^*(z) = x + x\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\,\frac{(\sigma n+2)_{n-1}}{n!}\,x^{\sigma n} \tag{I,40}$$

A ce stade il est commode d'introduire la fonction

$$\Phi(1,\sigma;z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\,\frac{(\sigma n+2)_{n-1}}{n!} \tag{I,41}$$

comparons avec (I, 40) :

$$\Phi(1,\sigma;z) = x^{-1}X^*(zx^{\sigma})$$

$X^*(z)$ étant solution de (I, 32) avec $X(x) = x^{\sigma+1}$, $\Phi(1,\sigma;z)$ est donc la solution de

$$\begin{cases} \left[\Phi(1,\sigma;z)\right]^{\sigma+1} = \left[\Phi(1,\sigma;z)-1\right]z \\ \lim\limits_{z\to\infty}\Phi(1,\sigma;z) = 1 \end{cases} \tag{I,42}$$

en résolvant (I, 42) on établit les formes compactes suivantes pour quelques valeurs particulières de σ

(I,43)

σ	$\Phi(1,\sigma;z)$
0	$\frac{z}{z-1}$
-1	$1+z^{-1}$
+1	$\frac{z}{2}\left[1-\sqrt{1-4z^{-1}}\right]$
-2	$\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{1+4z^{-1}}\right]$
$-\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2z}\left[z^{-1}+\sqrt{4+z^{-2}}\right]$

Comme $X'(x) = (\sigma+1)x^{\sigma}$ on est conduit, d'après (I, 31) à

(I,44) $$\frac{1}{n!}D^n\left[x^{(\sigma+1)n}f(x)\right] \dashv \frac{\Phi(1,\sigma;zx^{-\sigma})\,f\left[x\Phi(1,\sigma;zx^{-\sigma})\right]}{\sigma+1-\sigma\Phi(1,\sigma;zx^{-\sigma})}$$

On en déduit, en posant $f(x) = x^{\beta}$ puis en faisant $x = 1$ dans la relation obtenue

(I,45) $$\binom{(\sigma+1)n+\beta}{n} \dashv \frac{\left[\Phi(1,\sigma;z)\right]^{\beta+1}}{\sigma+1-\sigma\Phi(1,\sigma;z)}$$

où, suivant l'usage

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}$$

de même, en posant $f(x) = x^{\beta}$ et $X(x) = x^{\sigma+1}$ dans (I,34) puis en faisant $x = 1$ dans la relation obtenue, on obtient une correspondance qui nous sera utile par la suite, à savoir

(I,46) $$\frac{\beta}{(\sigma+1)n+\beta}\binom{(\sigma+1)n+\beta}{n} \dashv \left[\Phi(1,\sigma;z)\right]^{\beta}$$

4 - TRANSFORMEE D'UNE FONCTION DEFINIE PAR UNE FORMULE DE TYPE RODRIGUES GENERALISEE

Nous allons étendre les résultats précédents au cas où $f_n(x)$ est définie par une relation de la forme

(I,47) $$f_n(x) = \frac{1}{n!}\left[Y(x)D\right]^n\left\{\left[X(x)\right]^n f(x)\right\}$$

La proposition suivante a fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus([9]).

Proposition

Soit $\mathcal{D}$ un domaine contenant une courbe simple fermée γ entourant le point x et limitant un domaine $\delta \subset \mathcal{D}$;

Si $y = \xi(x)$ vérifie la relation

(I,48) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d\xi(x)}{dx} = \frac{1}{Y(x)}$$

où $\xi(w)$ est une fonction holomorphe univalente dans $\mathcal{D}$

Si X(w) est une fonction holomorphe dans $\mathcal{D}$, ne s'annulant ni sur γ ni en x et si f(w) est holomorphe dans δ, alors pour

(I,49) $$|z| > \operatorname*{Max}_{\gamma}\left|\frac{X(w)}{\xi(w)-\xi(x)}\right|$$

la transformée Z de $f_n(x)$ est donnée par la relation

(I,50) $$\frac{1}{n!}\left[Y(x)D\right]^n\left\{\left[X(x)\right]^n f(x)\right\} \dashv \frac{z\,f\left[Z^*(z)\right]}{z - X'\left[Z^*(z)\right]Y\left[Z^*(z)\right]} \qquad X'(x) = DX(x)$$

où $Z^*(z)$ est la racine de l'équation en Z^*

(I, 51 a) $$X(z^*) = [\xi(z^*) - \xi(x)]\,\zeta$$

vérifiant

(I, 51 b) $$\lim_{\zeta \to \infty} z^*(\zeta) = x$$

ou encore

(I, 52) $$z^*(\zeta) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{-n} \frac{1}{n!} \left[Y(x) D\right]^{n-1} \left\{ \left[X(x)\right]^n Y(x) \right\}$$

Démonstration

Considérons la transformation $W = \xi(w)$ qui transforme γ en Γ, δ en Δ, $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}'$, et x en y. On a, d'après (I, 48)

$$Y(x) D = Y(x) \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} = \frac{d}{dy}$$

d'où

$$f_n[\xi^{-1}(y)] = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dy^n} \left\{ \left[X(\xi^{-1}(y))\right]^n f[\xi^{-1}(y)] \right\}$$

à condition de prendre $|z|$ assez grand, c'est-à-dire

$$|\zeta| > \operatorname*{Max}_{\Gamma} \left| \frac{X[\xi^{-1}(W)]}{W - y} \right| = \operatorname*{Max}_{\gamma} \left| \frac{X(w)}{\xi(w) - \xi(x)} \right|$$

les hypothèses requises pour appliquer (I, 31) sont satisfaites, d'où

(I, 53) $$f_n[\xi^{-1}(y)] \dashv \frac{\zeta^n f\{\xi^{-1}[\tilde{X}(\zeta)]\}}{\zeta - \left\{ \frac{d}{dy} X[\xi^{-1}(y)] \right\}_{y = \tilde{X}(\zeta)}}$$

où $\tilde{X}(z)$ est solution de

(I, 54) $$\begin{cases} X[\xi^{-1}(\tilde{x})] = (\tilde{x} - y)\,\zeta \\ \lim_{\zeta \to \infty} \tilde{X}(\zeta) = y \end{cases}$$

posons $z^*(\zeta) = \xi^{-1}[\tilde{X}(\zeta)]$ soit $\tilde{X}(\zeta) = \xi[z^*(\zeta)]$

(I, 54) devient

$$\begin{cases} X(z^*) = [\xi(z^*) - \xi(x)]\,\zeta \\ \lim_{\zeta \to \infty} \xi[z^*(\zeta)] = \xi(x) \quad \text{soit} \quad \lim_{\zeta \to \infty} z^*(\zeta) = x \end{cases}$$

ce sont les relations (I, 51). Remarquons que

$$\frac{d}{dy} X[\xi^{-1}(y)] = X'[\xi^{-1}(y)] \frac{dx}{dy} = X'[\xi^{-1}(y)]\, Y[\xi^{-1}(y)]$$

il suffit de reporter dans (I, 53) pour établir (I, 50).

Il ne reste plus qu'à établir (I, 52). Pour cela, il suffit d'appliquer la formule de Lagrange à la fonction $\xi^{-1}(W)$ holomorphe dans Δ

$$Z^*(z) = \xi^{-1}[\tilde{X}(z)] = \xi^{-1}(y) + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left\{ [X(\xi^{-1}(y))]^n \frac{d\xi^{-1}(y)}{dy} \right\}$$

en revenant à la variable x, compte tenu de (I, 48), on établit (I, 52).

Si Y(x) = 1 on retrouve les résultats du paragraphe précédent. Nous allons envisager d'autres cas particuliers susceptibles d'application en théorie des fonctions spéciales.

4.1 - Cas particulier X(x) = 1

La correspondance (I, 50) devient alors

(I, 55) $$\frac{1}{n!} [Y(x)D]^n [f(x)] \dashv f\left\{ \xi^{-1}[\xi(x) + z^{-1}] \right\}$$

signalons les cas particuliers suivants

(I, 55 a) $$\frac{1}{n!} \left(x^{1-\nu} D\right)^n [f(x)] \dashv f\left[x(1+\nu x^{-\nu} z^{-1})^{\frac{1}{\nu}}\right] \qquad \nu \neq 0$$

(I, 55 b) $$\frac{1}{n!} \left(-\frac{x^\nu}{\nu}\right)^n \left(x^{1-\nu} D\right)^n [f(x)] \dashv f\left[x \left(\frac{z}{z-1}\right)^{-\frac{1}{\nu}}\right] \qquad \nu \neq 0$$

(I, 55 c) $$\frac{1}{n!} (xD)^n [f(x)] \dashv f(x e^{\frac{1}{z}})$$

4.2 - Cas particulier $X(x) = x^{\sigma+1}$, $Y(x) = x^{1-\nu}$

Lorsque σ et ν sont quelconques, il convient de faire usage de (I, 52). Il est alors commode de généraliser la fonction Φ introduite au § 3

(I, 56 a) $$\Phi(\nu, \sigma; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \frac{(\nu)^{n-1}}{n!} \left(\frac{(\sigma - \nu + 1)n + \nu + 1}{\nu} \right)_{n-1} \qquad \nu \neq 0$$

(I, 56 b) $$\Phi(0, \sigma; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \frac{1}{n!} [(\sigma+1)n + 1]^{n-1} \qquad \nu = 0$$

D'après (I, 51) Φ est solution de

(I, 57 a) $$\nu \Phi^{\sigma+1} = (\Phi^\nu - 1) z \qquad \lim_{z \to \infty} \Phi(\nu, \sigma; z) = 1 \qquad \nu \neq 0$$

(I, 57 b) $$\Phi^{\sigma+1} = z \operatorname{Log} \phi \qquad \lim_{z \to \infty} \Phi(0, \sigma; z) = 1 \qquad \nu = 0$$

On obtient finalement les deux correspondances

(I, 58 a) $$\frac{1}{n!} \left(x^{1-\nu} D\right)^n \left[x^{(\sigma+1)n} f(x)\right] \dashv \frac{\nu f[x \Phi(\nu, \sigma; x^{\nu-\sigma-1} z)]}{\nu - (\sigma+1) + (\sigma+1)[\Phi(\nu, \sigma; x^{\nu-\sigma-1} z)]^{-\nu}} \qquad \nu \neq 0$$

(I,58 b) $$\frac{1}{n!}(xD)^n\left[x^{(\sigma+1)n}f(x)\right] \dashv \frac{f\left[x\,\Phi(0,\sigma;x^{-\sigma-1}z)\right]}{1-(\sigma+1)\,\mathrm{Log}\,\Phi(0,\sigma;x^{-\sigma-1}z)}$$

La fonction $\Phi(\nu,\sigma;z)$ est liée à la fonction $\Phi(1,\sigma;z)$. En effet, d'après (I, 46)

$$\left[\Phi\left(1,\frac{\sigma-\nu+1}{\nu};\nu^{-1}z\right)\right]^{\frac{1}{\nu}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\,\frac{\nu^{n-1}}{\frac{(\sigma+1)n+1}{\nu}}\binom{\frac{(\sigma+1)n+1}{\nu}}{n} \qquad \nu\neq 0$$

la somme figurant au membre de droite peut se mettre sous la forme (I, 56 a) et par conséquent

(I,59) $$\Phi(\nu,\sigma;z) = \left[\Phi\left(1,\frac{\sigma-\nu+1}{\nu};\nu^{-1}z\right)\right]^{\frac{1}{\nu}} \qquad \nu\neq 0$$

Compte tenu de (I, 43) on en déduit les formes compactes suivantes dans quelques cas particuliers

(I,60)

σ	$\Phi(\nu,\sigma;z)$ $\quad \nu\neq 0$
$\nu-1$	$\left(\frac{z}{z-\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}$
-1	$\left(1+\nu z^{-1}\right)^{\frac{1}{\nu}}$
$2\nu-1$	$\left\{\frac{z}{2\nu}\left[1-\sqrt{1-4\nu z^{-1}}\right]\right\}^{\frac{1}{\nu}}$
$-(\nu+1)$	$\left\{\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{1+4\nu z^{-1}}\right]\right\}^{\frac{1}{\nu}}$
$\frac{\nu}{2}-1$	$\left\{1+\nu z^{-1}\,\frac{\nu z^{-1}+\sqrt{4+\nu^2 z^{-2}}}{2}\right\}^{\frac{1}{\nu}}$

5 - GENERALISATION DU THEOREME DE CONVOLUTION REELLE

Le théorème suivant a fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus ([10]).

Théorème

(I,61) Si $$f(n) \dashv F(z)$$

(I,62) et si $$g(j,n) \dashv \frac{A(z)}{[B(z)]^j} \qquad \forall j\in N$$

(I,63) avec $$|g(j,n)| < M\,a^j b^n$$

où A(z) et B(z) sont indépendants de j, et où M, a et b désignent des constantes positives, on a alors

(I,64) $$\sum_{j=0}^{n} g(j,n-j) f(j) \dashv A(z)\, F[z\, B(z)] \qquad |z| > \sup\{b, aR_f\}$$

si de plus $aR_f < 1$

(I,65) $$\sum_{j=0}^{\infty} g(j,n) f(j) \dashv A(z)\, F[B(z)] \qquad |z| > b$$

Démonstration

Considérons $$S(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) z^{-j} \sum_{n=0}^{\infty} g(j,n) z^{-n}$$

d'après (I, 63) pour $|z| > b$

$$\bar{S}(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} |f(j) z^{-j}| \sum_{n=0}^{\infty} |g(j,n) z^{-n}| < M \sum_{j=0}^{\infty} |f(j) z^{-j} a^j| \sum_{n=0}^{\infty} b^n |z|^{-n} = M \frac{|z|}{|z| - b} \sum_{j=0}^{\infty} |f(j) z^{-j} a^j|$$

mais pour $|z| > aR_f$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |f(j) z^{-j} a^j| < M_1$$

et par conséquent

$$\bar{S}(f,g) < M M_1 \frac{|z|}{|z| - b}$$

Comme la série converge absolument, nous modifierons l'ordre des termes de la façon suivante

(I,66) $$S(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{j=0}^{n} g(j,n-j) f(j)$$

mais d'après (I, 62)

(I,67) $$S(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) \frac{A(z)}{[z\, B(z)]^j} = A(z) F[z B(z)]$$

il suffit de comparer (I, 66) et (I, 67) pour établir (I, 64).

Considérons maintenant $S'(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) \sum_{n=0}^{\infty} g(j,n) z^{-n}$

$$\bar{S}'(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} |f(j)| \sum_{n=0}^{\infty} |g(j,n) z^{-n}| < M \frac{|z|}{|z| - b} \sum_{j=0}^{\infty} |f(j) a^j| \qquad |z| > b$$

si $aR_f < 1$, $\sum_{j=0}^{\infty} |f(j) a^j| < M_2$; on a encore convergence absolue et nous pouvons modifier l'ordre des termes de la façon suivante

(I,68) $$S'(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} g(j,n) f(j)$$

mais d'après (I, 62)

(I,69) $$S'(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) \frac{A(z)}{[B(z)]^j} = A(z) F[B(z)]$$

il suffit de comparer (I, 68) et (I, 69) pour établir (I, 65).

Nous allons envisager quelques cas particuliers en supposant l'existence des transformées envisagées.

5.1 - Cas particulier $g(j,n) = \binom{(\sigma+1)(n+j)+\beta j+\alpha}{n}$

d'après (I, 45)

$$g(j,n) \dashv \frac{A(z)}{[B(z)]^j} \qquad A(z) = \frac{\Phi_1^{\alpha+1}}{\sigma+1-\sigma\Phi_1} \qquad B(z) = \Phi_1^{-(\beta+\sigma+1)} \qquad \Phi_1 = \Phi(1,\sigma;z)$$

Les correspondances (I, 64) et (I, 65) deviennent

$$\text{(I,70)} \qquad \sum_{j=0}^{n} \binom{(\sigma+1)n+\beta j+\alpha}{n-j} f(j) \dashv \frac{\Phi_1^{\alpha+1}}{\sigma+1-\sigma\Phi_1} F\left[z\Phi_1^{-(\beta+\sigma+1)}\right]$$

$$\text{(I,71)} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \binom{(\sigma+1)n+\beta j+\alpha}{n} f(j) \dashv \frac{\Phi_1^{\alpha+1}}{\sigma+1-\sigma\Phi_1} F\left[\Phi_1^{-\beta}\right]$$

Pour le choix particulier $\sigma = 0$ (I, 70) s'écrit

$$\text{(I,70 a)} \qquad \sum_{j=0}^{n} \binom{n+\beta j+\alpha}{n-j} f(j) \dashv \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\alpha+1} F\left[z^{-\beta}(z-1)^{\beta+1}\right]$$

pour $\beta = 0$, cette dernière correspondance devient

$$\text{(I,70 b)} \qquad \sum_{j=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-j} f(j) \dashv \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\alpha+1} F(z-1)$$

si $\alpha = 0$ on a un résultat connu ([4]).

La correspondance (I, 70 b) étant fort utile en pratique, il est intéressant de noter que l'on en déduit à l'aide de (I, 2)

$$\text{(I,70 c)} \qquad \sum_{j=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-j} u^{n-j} f(j) \dashv \left(\frac{z}{z-u}\right)^{\alpha+1} F(z-u)$$

où u désigne un paramètre indépendant de n.

5.2 - Cas particulier $g(j,n) = \frac{1}{(\sigma+1)(n+j)+\beta j+\alpha} \binom{(\sigma+1)(n+j)+\beta j+\alpha}{n}$

D'après (I, 46)

$$\left[(\beta+\sigma+1)j+\alpha\right] g(j,n) \dashv \frac{A(z)}{[B(z)]^j} \qquad A(z) = \Phi_1^{\alpha} \qquad B(z) = \Phi_1^{-(\beta+\sigma+1)} \qquad \Phi_1 = \Phi(1,\sigma;z)$$

on déduit alors de (I, 64) et (I, 65) les correspondances

$$\text{(I,72)} \qquad \sum_{j=0}^{n} \frac{(\beta+\sigma+1)j+\alpha}{(\sigma+1)n+\beta j+\alpha} \binom{(\sigma+1)n+\beta j+\alpha}{n-j} f(j) \dashv \Phi_1^{\alpha} F\left[z\Phi_1^{-(\beta+\sigma+1)}\right]$$

(I,73) $$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta j+\alpha}{(\sigma+1)n+\beta j+\alpha}\binom{(\sigma+1)n+\beta j+\alpha}{n} f(j) \dashv \Phi_1^{\alpha} F(\Phi_1^{-\beta})$$

posons

$$\tilde{f}(n) = \frac{f(n)}{(\beta+\sigma+1)n+\alpha} \dashv \tilde{F}(z)$$

$$\tilde{\tilde{f}}(n) = \frac{f(n)}{\beta n+\alpha} \dashv \tilde{\tilde{F}}(z)$$

les correspondances précédentes deviennent

(I,72 a) $$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(\sigma+1)n+\beta j+\alpha}\binom{(\sigma+1)n+\beta j+\alpha}{n-j} f(j) \dashv \Phi_1^{\alpha} \tilde{F}[z\Phi_1^{-(\beta+\sigma+1)}]$$

(I,73 a) $$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(\sigma+1)n+\beta j+\alpha}\binom{(\sigma+1)n+\beta j+\alpha}{n} f(j) \dashv \Phi_1^{\alpha} \tilde{\tilde{F}}[\Phi_1^{-\beta}]$$

Les correspondances (I, 70) et (I, 72 a), dans le cas particulier où $\beta = 0$, ont été publiées par BROWN ([11]) en 1969, sous une forme légèrement différente.

6 - GENERALISATION D'UN THEOREME DE BROWN

Le théorème suivant a fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus ([12]) où nous indiquons également quelques applications.

Théorème

Si la transformée Z de $f_n^{(\alpha)}(x)$ est de la forme

(I,74) $$f_n^{(\alpha)}(x) \dashv C(\alpha,z)\, H(x,z)$$

et s'il existe $h_n(x)$ et $c(\alpha,n)$ tels que

(I,75) $$h_n(x) \dashv H(x,z) \qquad c(\alpha,n) \dashv C(\alpha,z)$$

(I,76) $$g(j,n) = c[\alpha+\sigma(n+j),n] \dashv \frac{A(z)}{[B(z)]^j} \qquad \forall j \in N$$

(I,77) $$|g(j,n)| < M a^j b^n$$

où A(z) et B(z) sont indépendants de j et où M, a et b sont des constantes (positives),

la transformée Z de $f_n^{(\alpha+\sigma n)}(x)$ est alors donnée par la relation

(I,78) $$f_n^{(\alpha+\sigma n)}(x) \dashv A(z)\, H[x, zB(z)] \qquad |z| > \sup\{b, aR_k\}$$

Démonstration

Compte tenu de (I, 74) et (I, 75), le théorème de convolution (I, 6) donne

$$f_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^{n} c(\alpha, n-j)\, h_j(x)$$

d'où

$$f_n^{(\alpha+\sigma n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} c(\alpha+\sigma n, n-j)\, h_j(x) = \sum_{j=0}^{n} g(j, n-j)\, h_j(x)$$

il suffit de faire usage de (I, 64) pour achever la démonstration.

Envisageons le cas particulier suivant

$$C(\alpha; z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\alpha} \vdash \binom{n+\alpha-1}{n}$$

mais d'après (I, 45)

$$c\left[\alpha+\sigma(n+j), n\right] = \binom{(\sigma+1)n+\sigma j+\alpha-1}{n} \dashv \frac{\Phi_1^{\alpha+\sigma j}}{\sigma+1-\sigma\Phi_1} \qquad \Phi_1 = \Phi(1, \sigma; z)$$

d'où

$$A(z) = \frac{\Phi_1^{\alpha}}{\sigma+1-\sigma\Phi_1} \qquad B(z) = \Phi_1^{-\sigma}$$

compte tenu de (I, 42), la correspondance (I, 78) devient dans ce cas particulier

$$f_n^{(\alpha+\sigma n)}(x) \dashv \frac{\Phi_1^{\alpha}}{\sigma+1-\sigma\Phi_1} H\left(x, \frac{\Phi_1}{\Phi_1-1}\right)$$

résultat publié en 1969 par BROWN ([13]).

7 - CORRESPONDANCES INTEGRALES

Désignons par A(t) et B(t) deux fonctions de la variable continue t et soit f(n) une fonction de la variable discrète n telle que

$$f(n) \dashv F(z)$$

Proposition

h_1) Si l'intégrale $A_o = \int_a^b |A(t)|\, dt$ existe

h_2) Si la série de fonctions de la variable t

$$F\left[\frac{z}{B(t)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f(n) \left[B(t)\right]^n$$

est uniformément convergente sur l'intervalle (a, b)

h_3) Et si les intégrales

$$\int_a^b A(t)\, F\left[\frac{z}{B(t)}\right] dt$$

$$I(n) = \int_a^b A(t)\, \left[B(t)\right]^n \, dt$$

existent, on a alors la correspondance suivante

(I,79) $$I(n)\, f(n) \dashv \int_a^b A(t)\, F\left[\frac{z}{B(t)}\right] dt$$

Démonstration

Si la série de fonctions de la variable t

$$F\left[\frac{z}{B(t)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f(n) \left[B(t)\right]^n$$

converge uniformément,

$$A(t) F\left[\frac{z}{B(t)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f(n)\, A(t) \left[B(t)\right]^n$$

et compte tenu des hypothèses on peut alors intégrer terme à terme cette dernière série afin d'obtenir

$$\int_a^b A(t)\, F\left[\frac{z}{B(t)}\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f(n) I(n)$$

relation équivalente à (I, 79).

Cas particulier important

Un cas particulier intéressant en pratique s'obtient en considérant un intervalle d'intégration infini ($t \geq 0$) et en posant

$$A(t) = e^{-pt} A_1(t)$$

Si nous notons L $\{g(t)\}$ la transformée de Laplace d'une fonction g(t), la correspondance (I, 79) devient alors, pourvu que les hypothèses h_1 h_2 et h_3 soient satisfaites :

(I,80)
$$\begin{cases} I(n,p)\, f(n) \dashv L\left\{ A_1(t)\, F\left[\frac{z}{B(t)}\right] \right\} \\ \\ I(n,p) = L\left\{ A_1(t) \left[B(t)\right]^n \right\} \end{cases}$$

Compte tenu des nombreuses correspondances connues pour la transformation de Laplace, la relation (I, 80) est particulièrement efficace pour calculer de nouvelles transformées Z. Par un choix convenable de $A_1(t)$ et de B(t) on en déduit, entre autres, pourvu que les hypothèses h_1, h_2 et h_3 soient satisfaites :

(I,80 a) $$\Gamma(\beta n+\alpha) f(n) \dashv \left\{ L\left[t^{\alpha-1} F(z t^{-\beta}) \right] \right\}_{p=1} \qquad \alpha>0,\ \beta>0$$

(I,80 b) $$(kn)!\, L_{kn}^{\delta}(x) f(n) \dashv x^{-\frac{\delta}{2}} e^{x} \left\{ L\left[t^{\frac{\delta}{2}} J_{\delta}(2\sqrt{xt})\, F(z t^{-k}) \right] \right\}_{p=1} \qquad \delta>-1,\ k\in\mathbb{N}^*$$

(I,80c) $$\frac{\Gamma(\beta n+\delta+\alpha+1)}{\Gamma(2\delta+1)}\, {}_1F_1\left(\beta n+\delta+\alpha+1;\, 2\delta+1;\, -x\right) f(n) \dashv \left\{ L\left[t^{\alpha} J_{2\delta}(2\sqrt{xt})\, F(z t^{-\beta}) \right] \right\}_{p=1} \qquad \begin{matrix} \alpha+\delta>-1 \\ \beta>0 \end{matrix}$$

(I,80 d) $$\frac{\Gamma(\beta n+\delta+\alpha+1)}{(1+x^2)^{\frac{\beta n+\alpha+1}{2}}}\, P_{\beta n+\alpha}^{-\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) f(n) \dashv \left\{ L\left[t^{\alpha} J_{\delta}(xt)\, F(z t^{-\beta}) \right] \right\}_{p=1} \qquad \begin{matrix} \alpha+\delta>-1 \\ \beta>0 \end{matrix}$$

avec

$$P_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1\left(-\nu,\, \nu+1;\, 1-\mu;\, \frac{1-x}{2}\right) \qquad |x-1|<2$$

la liste de ces cas particuliers n'est point limitative et l'on pourrait envisager de nombreux autres cas particuliers.

Exemple

Soit à calculer la transformée Z de la fonction g(n) ainsi définie

$$g(n) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{2n-m+2}{4}}}\, P_{n-\frac{m}{2}}^{-\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \frac{d^m}{dy^m} L_n(y) \qquad |x-1|<2$$

ou encore

$$g(n) = \frac{\Gamma(n+\frac{m}{2}-\frac{m}{2}+1)}{(1+x^2)^{\frac{n-\frac{m}{2}+1}{2}}}\, P_{n-\frac{m}{2}}^{-\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \frac{1}{n!} \frac{d^m}{dy^m} L_n(y)$$

nous ferons usage de (I, 80 d) avec

$$\beta=1 \qquad \delta=\frac{m}{2} \qquad \alpha=-\frac{m}{2} \qquad f(n)=\frac{1}{n!}\frac{d^m}{dy^m} L_n(y)$$

On trouve dans les tables de transformées Z

$$F(z) = (-1)^m e^{\frac{1}{z}} (yz)^{-\frac{m}{2}} J_m\left(2\sqrt{\frac{y}{z}}\right)$$

d'où

$$g(n) \dashv \left\{ L\left[(-1)^m (yz)^{-\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(xt)\, J_m\left(2\sqrt{\frac{y}{z}\,t}\right) \right] \right\}_{p=1-\frac{1}{z}}$$

mais on trouve dans les tables de transformées de Laplace

$$L\left[J_{\frac{m}{2}}(bt)\,J_m(2\sqrt{at})\right] = \frac{e^{-\frac{ap}{p^2+b^2}}}{\sqrt{p^2+b^2}}\,J_{\frac{m}{2}}\left(\frac{ab}{p^2+b^2}\right)$$

d'où la transformée Z, à notre connaissance inédite

$$g(n) \dashv (-1)^m \exp\left[-y\,\frac{z-1}{(1+x^2)z^2-2z+1}\right] \frac{z(yz)^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{(1+x^2)z^2-2z+1}}\,J_{\frac{m}{2}}\left(\frac{xyz}{(1+x^2)z^2-2z+1}\right)$$

si $m = 0$, on en déduit un résultat connu [(14), p. 170] pour $g(n) = L_n(y) P_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Ainsi, la correspondance (I, 80) permet d'étendre rapidement les tables de transformées Z à partir d'une table de transformées de Laplace.

8 - CORRESPONDANCES NECESSITANT L'INVERSION D'UNE TRANSFORMEE DE LAPLACE

Proposition

Soit $\varphi(n,t)$ une fonction des variables discrète $n \in N$ et continue t, dont la transformée de Laplace relative à la variable t est de la forme

$$L\left[\varphi(n,t)\right] = \int_0^\infty e^{-pt}\,\varphi(n,t)\,dt = \frac{A(p)}{[B(p)]^n} \qquad \forall n \in N$$

où A(p) et B(p) ne dépendent pas de n.

Soit f(n) une fonction de la variable discrète $n \in N$ telle que

$$f(n) \dashv F(z)$$

h'_1) Supposons que la fonction A(p) F [zB(p)] soit représentable par la série infinie de transformées de Laplace suivante

$$A(p)\,F[zB(p)] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f(n)\,\frac{A(p)}{[B(p)]^n} \qquad \mathcal{R}(p) \geq p_0$$

où $\mathcal{R}(p)$ désigne la partie réelle de p. Ceci implique naturellement que toutes les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,\varphi(n,t)\,dt = \frac{A(p)}{[B(p)]^n} \qquad n \in N$$

convergent dans le demi plan commun $\mathcal{R}(p) \geq p_0$. De plus, nous ferons les deux hypothèses suivantes :

h'_2) Les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,|\varphi(n,t)|\,dt = \hat{\varphi}(n,p) \qquad n \in N$$

existent dans le demi plan $\mathcal{R}(p) \geq p_0$

h'$_3$) La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| f(n) z^{-n} \right| \hat{\varphi}(n, p_0)$$

converge .

Dans ces conditions, on a alors la correspondance suivante pour tout point de la demi-droite t > 0, tel que chacune des fonctions φ (n, t) y soit continue

(I,81) $$\varphi(n,t)\, f(n) \rightarrow L^{-1}\left\{ A(p) F[z B(p)] \right\}$$

où L^{-1} désigne la transformation inverse de la transformation de Laplace.

Démonstration

La démonstration est immédiate, puisque d'après une propriété bien connue pour la transformation de Laplace, on peut avec les hypothèses précédentes inverser terme à terme le développement en série de A(p) F [zB(p)] sous la forme

$$L^{-1}\left\{ A(p) F[z B(p)] \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f(n) \varphi(n,t)$$

le développement en série de fonctions de la variable t convergent, même absolument, vers une fonction $\psi(z, t)$ telle que

$$L[\psi(z,t)] = A(p) F[z B(p)]$$

Un cas particulier intéressant correspond au choix pour $\varphi(n,t)$ de

$$\varphi(n,t) = \frac{t^{\beta n+\alpha-1}}{\Gamma(\beta n+\alpha)} \qquad \alpha>0,\ \beta>0$$

dont la transformée de Laplace est

$$L[\varphi(n,t)] = \frac{1}{p^{\beta n+\alpha}}$$

aussi, la correspondance (I, 81) s'écrit dans ce cas particulier

$$t^{\beta n+\alpha-1} \frac{f(n)}{\Gamma(\beta n+\alpha)} \rightarrow L^{-1}\left[\frac{F(z p^{\beta})}{p^{\alpha}} \right] \qquad \alpha>0,\ \beta>0$$

soit pour t = 1

(I,81 a) $$\frac{f(n)}{\Gamma(\beta n+\alpha)} \rightarrow \left\{ L^{-1}\left[\frac{F(z p^{\beta})}{p^{\alpha}} \right] \right\}_{t=1} \qquad \alpha>0,\ \beta>0$$

Si $\alpha = \beta = 1$, on a une deuxième relation permettant de calculer la transformée Z de $\frac{f(n)}{n!}$ à savoir

$$\frac{f(n)}{n!} \dashv \left\{ L^{-1}\left[\frac{F(zp)}{p}\right] \right\}_{t=1}$$

De nombreux autres cas particuliers pourraient être envisagés. Signalons que, pour un choix convenable de $\varphi(n, t)$ on obtient, entre autres, les correspondances suivantes

(I,81 b) $$\frac{(kn)!}{\Gamma(kn+\delta+1)} L^{\delta}_{kn}(t) f(n) \dashv t^{-\delta} L^{-1}\left\{ \frac{F\left[z\left(\frac{p}{p-1}\right)^k\right]}{p^{\delta+1}} \right\} \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

(I,81 c) $$\left(\frac{t}{2}\right)^{\beta n+\nu} \frac{J_{\beta n+\nu}(t)}{\Gamma\left(\beta n+\nu+\frac{1}{2}\right)} f(n) \dashv \frac{1}{\sqrt{\pi}} L^{-1}\left\{ \frac{F\left[z\left(p^2+1\right)^{\beta}\right]}{\left(p^2+1\right)^{\nu+\frac{1}{2}}} \right\} \qquad \beta \geq 0,\ \nu > -\frac{1}{2}$$

(I,81 d) $$t^{\frac{\beta n+\nu}{2}} J_{\beta n+\nu}\left(2\sqrt{t}\right) f(n) \dashv L^{-1}\left\{ e^{-\frac{1}{p}} \frac{F(zp^{\beta})}{p^{\nu+1}} \right\} \qquad \beta \geq 0,\ \nu > -1$$

(I, 81 e) $$J_{\beta n+\nu}(t) f(n) \dashv L^{-1}\left\{ \frac{F\left[z\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{\beta}\right]}{\sqrt{p^2+1}\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{\nu}} \right\} \qquad \beta \geq 0,\ \nu > -1$$

En définitive, la correspondance (I, 81) permet, dans certains cas particuliers, de calculer rapidement des transformées Z à partir d'une table de transformées de Laplace.

CHAPITRE III

INVERSION DE LA TRANSFORMATION Z
OU TRANSFORMATION Z^{-1}

RAPPELS

En général, le calcul de f(n) à partir de F(z) peut être effectué par l'une des méthodes suivantes ou par des combinaisons de ces méthodes.

1 - USAGE DES TABLES

On cherche à écrire F(z) sous forme d'une combinaison linéaire de transformées figurant dans les tables soit

$$F(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j F_j(z)$$

les tables fournissent alors les fonctions $f_j(n)$ et

$$f(n) = \sum_{j=0}^{m} a_j f_j(n)$$

2 - EXPLOITATION DES PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION DIRECTE

Chaque fois que possible, il convient d'exploiter les propriétés de la transformation directe. Ainsi, par exemple

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)} = \frac{z}{z-1}\,\frac{z}{z-a} = \frac{z}{z-1}\,Z\{a^n\}$$

et d'après la propriété dite de sommation

$$f(n) = \sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Signalons, entre autres, la formule d'inversion du produit de deux transformées, fort utile en pratique

$$F(z)\,G(z) \;\vdash\; \sum_{j=0}^{n} f(j)\,g(n-j) = \sum_{j=0}^{n} f(n-j)\,g(j)$$

De même, le théorème de convolution généralisé (I, 64) que nous avons établi au chapitre II sera, dans certains cas, particulièrement commode pour inverser une transformée Z de la forme $A(z)F[zB(z)]$.

3 - DECOMPOSITION EN SERIE DE PUISSANCES DE z^{-1}

Considérons une fonction F(z) analytique pour $|z| > R_f$ et admettant le développement suivant en série de puissances de z^{-1}

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

il résulte immédiatement de la définition de la transformation Z

$$f(n) = a_n$$

4 - FORMULE D'INVERSION DANS LE PLAN COMPLEXE

Compte tenu de la relation de définition de F(z) et du théorème des résidus, il est aisé d'établir

(I,82) $$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz$$

Γ étant un contour fermé tel que F(z) soit analytique sur et à l'extérieur de Γ .

5 - THEOREME DES VALEURS INITIALE ET FINALE ET EXTENSION

5.1 - Théorème de la valeur initiale

Il résulte de la définition de F(z)

(I,83) $$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

5.2 - Théorème de la valeur finale

Si $(1 - z^{-1})$ F(z) n'a pas de pôles sur ou à l'extérieur du cercle $|z| = 1$ alors

(I,84) $$\lim_{n \to \infty} f(n) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z)$$

5.3 - Méthode d'inversion de L.R. BADGETT

L.R. BADGETT ([15]) propose d'étendre le théorème de la valeur initiale. Considérons en effet la fonction $F_1(z)$ ainsi définie

$$F_1(z) = z F(z) - z f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) z^{-n}$$

on a alors

$$f(1) = \lim_{z \to \infty} F_1(z)$$

et plus généralement

$$f(n) = \lim_{z \to \infty} F_n(z)$$

les $F_n(z)$ se calculant de proche en proche à l'aide de la relation de récurrence

$$F_n(z) = z\,F_{n-1}(z) - z\,f(n-1) \qquad F_0(z) = F(z)$$

6 - METHODE DES DERIVEES SUCCESSIVES

On vérifie aisément

$$f(n) = \frac{1}{n!} \lim_{z \to \infty} \left[\left(-z^2 \frac{d}{dz}\right)^n F(z) \right]$$

ou encore

$$f(n) = \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{z \to \infty} \left\{ z^{n+1} \frac{d^n}{dz^n} \left[z^{n-1} F(z) \right] \right\}$$

7 - INVERSION DU QUOTIENT DE DEUX TRANSFORMEES Z

Le théorème suivant constitue une extension du théorème de D.A. PIERRE ([16]) :

Théorème

Si $$f(n) \dashv F(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

et si l'on sait inverser A(z) et B(z) soit

$$A(z) \vdash a(n)$$
$$B(z) \vdash b(n) \quad \text{avec } b(0) = 1$$

alors les f(n) peuvent être calculés de proche en proche à l'aide de la relation de récurrence

(I,85) $$f(n) = a(n) - \sum_{j=1}^{n} b(j)\,f(n-j) \qquad f(0) = a(0)$$

Démonstration

Cette relation de récurrence a été établie par D.A. Pierre considérant l'inversion du quotient de deux polynômes en z tels que le degré du dénominateur soit supérieur ou égal au degré du numérateur. Nous allons établir que cette relation est en fait générale et s'applique encore dans le cas où A(z) et B(z) désignent deux quelconques transformées Z pourvu que b(0) = 1 et que le quotient $\frac{A(z)}{B(z)}$ représente bien une transformée Z.

En effet

$$B(z)\,F(z) = A(z)$$

ce qui, compte tenu de la propriété dite de convolution et de b(0) = 1, signifie

$$f(0) = a(0)$$

$$f(n) + \sum_{j=1}^{n} b(j)\, f(n-j) = a(n)$$

et la relation de récurrence est établie.

Remarque

Le théorème de la valeur initiale peut être utile pour vérifier la condition $b(0) = \lim_{z\to\infty} B(z) = 1$. Cette condition n'est point restrictive puisque l'on pourra généralement s'y ramener.

Disposition tabulaire

La disposition tabulaire proposée par D.A. Pierre reste valable dans le cas général ; cette disposition, rappelée ci-dessous, diminue considérablement les risques d'erreur lors de l'application de la relation de récurrence pour le calcul numérique des f(n).

n	$f(n)$	$a(n)$	$-b(1)$	$-b(2)$	$-b(3)$
0	$a(0)$	$\xleftarrow{0}$ $a(0)$	$-b(1)f(0)$	$-b(2)f(0)$	$-b(3)f(0)$
1	$a(1)-b(1)f(0)$	$\xleftarrow{1}$ $a(1)$	$-b(1)f(1)$	$-b(2)f(1)$	$-b(3)f(1)$
2	$a(2)-b(1)f(1)-b(2)f(0)$	$\xleftarrow{2}$ $a(2)$	$-b(1)f(2)$	$-b(2)f(2)$	$-b(3)f(2)$
3	$a(3)-b(1)f(2)-b(2)f(1)-b(3)f(0)$	$\xleftarrow{3}$ $a(3)$			

Dans la troisième colonne on inscrira a(0), a(1), a(2),... et dans la première ligne, - b(1), - b(2), - b(3),...

On inscrira aussi f(0) = a(0) ; alors commence un processus de calcul que l'on poussera aussi loin qu'on le voudra :

Dans la case déterminée par la ligne f(0) et la colonne - b(n) on inscrit le produit - b(n)f(0). En sommant en diagonale suivant la flèche 1 on obtient f(1). On peut alors compléter les cases - b(n)f(1) et en sommant à nouveau en diagonale suivant la flèche 2 on obtient f(2) et ainsi de suite.

8 - INVERSION DE $F(z) = [A(z)]^{\alpha}$

P. BARRUCAND ([17]) a montré que, si l'on savait inverser A(z) sous la forme

$$A(z) \vdash a(n)$$

avec $\underline{a(0) = 1}$, alors les $f(n) \dashv [A(z)]^{\alpha}$ pouvaient se calculer de proche en proche à l'aide de la relation de récurrence

(I,86) $$n f(n) = \sum_{j=1}^{n} [(\alpha+1)j - n]\, a(j)\, f(n-j) \qquad f(0)=1$$

9 - INVERSION DE $F(z) = (\frac{z}{z-1})^{\alpha}\ e^{B(z)}$

A. PAIN ([18]) a montré que, si l'on savait inverser B(z) sous la forme

$$B(z) \vdash b(n)$$

alors les $f(n) \dashv (\frac{z}{z-1})^{\alpha}\ e^{B(z)}$ pouvaient se calculer de proche en proche à l'aide de la relation de récurrence

(I,87) $$(n+1) f(n+1) = (n+\alpha) f(n) + \sum_{j=0}^{n} [(j+1)b(j+1) - j\,b(j)]\, f(n-j) \qquad f(0) = e^{b(0)}$$

Dans le $\underline{\text{cas particulier } \alpha = 0}$, A. PAIN ([19]) a également établi la relation de récurrence

(I,88) $$(n+1) f(n+1) = \sum_{j=0}^{n} (j+1)\, b(j+1)\, f(n-j) \qquad f(0) = e^{b(0)}$$

CHAPITRE IV

METHODES D'INVERSION INEDITES

Certaines des méthodes précédemment indiquées, telles par exemple la décomposition en puissances de z^{-1}, permettent théoriquement d'inverser toute transformée Z quelle que soit sa complexité ; mais pratiquement, ces méthodes exigent parfois des calculs si laborieux qu'il est alors préférable de rechercher une relation de récurrence permettant le calcul des f(n) de proche en proche. C'est pourquoi les relations (I, 85, 86, 87, 88) peuvent être fort utiles en pratique, bien que les possibilités d'application soient limitées du fait des hypothèses un peu sévères sur la forme de F(z). D'un autre côté, des hypothèses trop générales sur F(z) conduiraient à des relations trop compliquées. Par contre, une hypothèse raisonnable consiste à supposer F(z) de la forme

$$\text{(I,89)} \qquad \begin{cases} F(z) = A(z)\, e^{B(z)} \\ A(z) = [A_1(z)]^{\alpha_1} [A_2(z)]^{\alpha_2} \dots [A_m(z)]^{\alpha_m} \end{cases}$$

Nous distinguerons deux cas.

1 - LA RELATION DE RECURRENCE COMPREND UN NOMBRE FINI DE TERMES

Théorème

Si F(z) est de la forme (I, 89) où éventuellement une et une seule des fonctions A(z) ou B(z) peut désigner une constante

Si B(z) est une fraction rationnelle en z dont le degré du dénominateur est supérieur ou égal au degré du numérateur

Et si $\forall r = 1, 2, \dots, m$, $A_r(z)$ est une fraction rationnelle en z dont le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur, alors l'expression

$$\text{(I,90)} \qquad E(z) = -z\left[\frac{1}{A(z)}\frac{dA(z)}{dz} + \frac{dB(z)}{dz}\right]$$

peut se mettre sous la forme

$$\text{(I,91)} \qquad E(z) = \frac{G(z)}{H(z)} = \frac{\sum_{j=1}^{k} g(j) z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^{k} h(j) z^{-j}}$$

et les f(n) peuvent être calculés de proche en proche à l'aide de la relation de récurrence du k^{e} ordre

(I,92) $$n f(n) = \sum_{j=1}^{k} \left[g(j) - (n-j)\, h(j) \right] f(n-j) \qquad f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

Démonstration

Supposons $\frac{dA(z)}{dz} \neq 0$ et considérons

$$E_1(z) = -\frac{z}{A(z)} \frac{dA(z)}{dz} = -z \sum_{r=1}^{m} \frac{\alpha_r}{A_r(z)} \frac{dA_r(z)}{dz}$$

les $A_r(z)$ étant par hypothèse des fractions rationnelles en z, $E_1(z)$ peut donc se mettre sous la forme

$$E_1(z) = \frac{\sum_{j=0}^{q} a^*(j) z^{-j}}{\sum \bar{a}(j) z^{-j}}$$

où l'un au moins des $\bar{a}(j)$ est non nul. De même, puisque nous supposons $\frac{dA(z)}{dz} \neq 0$ l'un au moins des a*(j) est non nul.

Soient $a^*(j_o)$ le premier a*(j) non nul ($j_o \leqslant q$) et $\bar{a}(j_1)$ le premier $\bar{a}(j)$ non nul ($j_1 \leqslant q$). Il vient

(I,93) $$E_1(z) = \frac{\sum_{j=j_o}^{q} a^*(j) z^{-j}}{\sum_{j=j_1}^{q} \bar{a}(j) z^{-j}}$$

Mais on a aussi

$$E_1(z) = \frac{-z \frac{dA(z)}{dz}}{A(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{n a(n)\}}{\mathcal{Z}\{a(n)\}} \qquad , \quad a(n) \dashv A(z)$$

et d'après le théorème de la valeur initiale

(I,94) $$\lim_{z \to \infty} E_1(z) = \frac{0\, a(0)}{a(0)} = 0$$

puisque $a(0) = \lim_{z \to \infty} A(z) \neq 0$ du fait que chaque $A_r(z)$ est une fraction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont de même degré.

D'après (I, 93)

(I,95) $$\lim_{z \to \infty} E_1(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{a^*(j_o)}{\bar{a}(j_1)} z^{-(j_o - j_1)}$$

d'après (I, 94) cette dernière limite doit être nulle et l'on a donc l'inégalité

$$j_o > j_1 \implies j_o \geq j_1 + 1$$

Il suffit de multiplier numérateur et dénominateur de (I, 93) par

$$\frac{z^{j_1}}{\bar{a}(j_1)}$$

pour obtenir

$$E_1(z) = \frac{\sum_{j=1}^{q-j_1} \frac{a^*(j+j_1)}{\bar{a}(j_1)} z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^{q-j_1} \frac{\bar{a}(j+j_1)}{\bar{a}(j_1)} z^{-j}}$$

Par un raisonnement analogue et en supposant $\frac{dB(z)}{dz} \neq 0$ on montre également que $E_2(z) = -z \frac{dB(z)}{dz}$ est de la forme

$$E_2(z) = \frac{\sum_{j=1}^{l-j_2} \frac{b^*(j+j_2)}{\bar{b}(j_2)} z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^{l-j_2} \frac{\bar{b}(j+j_2)}{\bar{b}(j_2)} z^{-j}}$$

Il en résulte que $E(z) = E_1(z) + E_2(z)$ est de la forme (I, 91) lorsque $\frac{dA(z)}{dz} \neq 0$ et $\frac{dB(z)}{dz} \neq 0$. Si une et une seule de ces dérivées est nulle, $E(z)$ se réduit à $E_1(z)$ ou $E_2(z)$ et $E(z)$ est encore de la forme (I, 91).

De (I, 89), on tire

$$-z \frac{dF(z)}{dz} = E(z) F(z)$$

ou encore

$$Z\{n f(n)\} H(z) = G(z) F(z)$$

et par conséquent, d'après la propriété dite de convolution réelle

$$\sum_{j=0}^{n} (n-j) f(n-j) h(j) = \sum_{j=0}^{n} g(j) f(n-j)$$

Compte tenu de $g(0) = 0$, $h(0) = 1$, $g(j) = h(j) = 0$ si $j > k$, cette relation devient

$$n f(n) + \sum_{j=1}^{k} (n-j) f(n-j) h(j) = \sum_{j=1}^{k} g(j) f(n-j)$$

relation qui peut s'écrire sous la forme (I, 92).

Remarque

L'hypothèse sur l'égalité des degrés du numérateur et du dénominateur pour chaque $A_r(z)$ n'est pas aussi restrictive qu'on pourrait le croire car un artifice de calcul permet généralement de s'y ramener. Soit par exemple

$$F(z) = \left(\frac{1}{z-1}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{z}{(z+1)^{5/2}}\, e^{-\frac{x}{z-1}}$$

posons

$$\Phi(z) = z^3 F(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{z}{z+1}\right)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{x}{z-1}}$$

le théorème s'applique alors à $\Phi(z)$. Un calcul élémentaire montre que

$$E(z) = \frac{-(x+1)z^{-1} + (5-x)z^{-2} - 4z^{-3}}{1 - z^{-1} - z^{-2} + z^{-3}}$$

et la relation de récurrence (I, 92) s'écrit

$$n\varphi(n) = [n-(x+2)]\,\varphi(n-1) + [n-(x-3)]\varphi(n-2) - (n+1)\varphi(n-3)$$

Compte tenu de

$$\varphi(0) = \lim_{z\to\infty} \Phi(z) = 1$$

on peut alors calculer les $\varphi(n)$ de proche en proche.

Comme $F(z) = z^{-3}\Phi(z)$ on en déduit

$$\begin{cases} f(n) = 0 & 0 \leqslant n \leqslant 2 \\ f(n) = \varphi(n-3) & n \geqslant 3 \end{cases}$$

et le problème est résolu.

2 - LE NOMBRE DE TERMES DE LA RELATION DE RECURRENCE CROIT AVEC n

Théorème

Si F(z) est de la forme (I, 89) où les $A_r(z)$ et B(z) désignent des transformées Z, c'est-à-dire

$$A_r(z) \vdash a_r(n) \qquad r = 1, 2, \ldots, m$$

$$B(z) \vdash b(n)$$

et si chaque $a_r(0) = \lim_{z\to\infty} A_r(z) \neq 0$ alors les f(n) peuvent être calculés de proche en proche à l'aide de la relation de récurrence

(I,96)
$$n f(n) = \sum_{j=1}^{n} \left[j\, b(j) + \sum_{r=1}^{m} \alpha_r \dot{a}_r(j) \right] f(n-j) \qquad f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

où les $\dot{a}_r(n)$ sont donnés par

(I,97)
$$-\frac{z}{A_r(z)} \frac{dA_r(z)}{dz} \vdash \dot{a}_r(n)$$

si l'on connaît les $a_r(n)$, on peut également calculer les $\dot{a}_r(n)$ à l'aide de la relation de récurrence

(I,98) $$a_r(0)\,\dot{a}_r(n) = n\,a_r(n) - \sum_{j=1}^{n-1} a_r(n-j)\,\dot{a}_r(j)$$

Démonstration

Nous commencerons par établir (I, 98). La relation (I, 97) peut encore s'écrire

$$\mathcal{Z}\left\{\dot{a}_r(n)\right\} = \frac{-z\frac{dA_r(z)}{dz}}{A_r(z)} = \frac{\mathcal{Z}\left\{n\,a_r(n)\right\}}{\mathcal{Z}\left\{a_r(n)\right\}}$$

d'où

$$\mathcal{Z}\left\{\dot{a}_r(n)\right\}\mathcal{Z}\left\{a_r(n)\right\} = \mathcal{Z}\left\{n\,a_r(n)\right\}$$

relation qui, interprétée à l'aide de la propriété dite de convolution réelle signifie

(I,99) $$\sum_{j=0}^{n} \dot{a}_r(j)\,a_r(n-j) = n\,a_r(n)$$

pour n = 0

$$\dot{a}_r(0)\,a_r(0) = 0$$

aussi $a_r(0) \neq 0 \Longrightarrow \dot{a}_r(0) = 0$ et (I, 99) devient

$$\dot{a}_r(n)\,a_r(0) + \sum_{j=1}^{n-1} \dot{a}_r(j)\,a_r(n-j) = n\,a_r(n)$$

ce qui établit (I, 98)

Considérons maintenant F(z) de la forme (I, 89). On en déduit aisément

$$-z\frac{dF(z)}{dz} = \left[-z\frac{dB(z)}{dz} - z\sum_{r=1}^{m}\frac{\alpha_r}{A_r(z)}\frac{dA_r(z)}{dz}\right]F(z)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{Z}\left\{n f(n)\right\} = \mathcal{Z}\left\{n\,b(n) + \sum_{r=1}^{m}\alpha_r\,\dot{a}_r(n)\right\}\mathcal{Z}\left\{f(n)\right\}$$

l'interprétation à l'aide de la propriété dite de convolution réelle, compte tenu de $\dot{a}_r(0) = 0$ (r = 1, 2, ... m) conduit à (I, 96) et la démonstration est achevée.

Un cas particulier intéressant est celui où F(z) est de la forme

(I,100) $$F(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\alpha} e^{B(z)}$$

la relation de récurrence (I, 96) s'écrit, dans ce cas particulier

(I,101) $$n f(n) = \sum_{j=1}^{n}\left[j\,b(j) + \alpha\right] f(n-j)$$

Cette dernière relation est plus simple que la relation (I, 87) établie par A. PAIN.

D E U X I E M E P A R T I E

SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA TRANSFORMATION Z EN THEORIE DES FONCTIONS SPECIALES

I N T R O D U C T I O N

Dès 1730, De Moivre introduisait, en théorie des probabilités, la notion de '' fonction génératrice '' dont l'importance en physique mathématique est, aujourd'hui, un fait universellement reconnu. Rappelons que la fonction génératrice, traditionnellement notée F(x,t), d'un ensemble $\{f_n(x)\}$ où $n \in N$ est étroitement liée à la transformée Z puisque par définition

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, f_n \, (x) \, t^n$$

où les coefficients c_n ne dépendent ni de x ni de t.

Des propriétés générales sont rappelées par EDERLYI ([20]) et RAINVILLE [([14]), p. 129] entre autres. Cependant, avec Rainville, nous devons constater que le maniement des fonctions génératrices reste davantage un art qu'une technique à cause de l'insuffisance des développements théoriques. Considérant qu'un usage fructueux de la fonction génératrice exige de ce fait une longue pratique et un entraînement sérieux, Rainville affirme [([14]), p. 130] : '' Il est souhaitable qu'à l'avenir l'on s'oriente vers des développements théoriques susceptibles de conduire à de nouveaux résultats ''. Un premier pas dans ce sens est réalisé par de récents et intéressants travaux tels que ([8, 11, 13, 17, 18, 19]) et ([21 à 25]). Notons également la possibilité d'utiliser des représentations opérationnelles pour l'étude de certaines fonctions spéciales et éventuellement pour établir de nouvelles fonctions génératrices ([26 à 35]).

En fait, nombreuses sont les propriétés connues pour la transformation Z qui demeurent ignorées en théorie des fonctions génératrices ; quant aux propriétés originales que nous avons établies il en est a fortiori de même. C'est pourquoi nous pensons que l'utilisation du symbolisme de la transformation Z, outre une simplification d'écriture, confère à la théorie des fonctions génératrices une efficacité nouvelle.

Les fonctions génératrices envisagées ci-dessous seront donc exprimées sous forme de transformées Z. Compte tenu du nombre considérable de fonctions spéciales connues et des diverses propriétés de la transformation Z, les possibilités nouvelles qui apparaissent sont très vastes, aussi devrons-nous nous contenter d'envisager brièvement quelques exemples. Cependant, le cas des polynômes de Konhauser, susceptibles d'application en physique et peu étudiés par ailleurs, retiendra particulièrement notre attention.

CHAPITRE PREMIER

POLYNOMES DE KONHAUSER

KONHAUSER ([36]) a étudié deux ensembles de polynômes biorthogonaux $\{Y_n^s(x,k)\}$ et $\{Z_n^s(x,k)\}$. Après avoir rappelé la définition de ces polynômes, nous établirons les nouvelles propriétés que nous avons résumées dans trois notes aux Comptes Rendus ([39-40-41]); nous ne rappellerons pas les propriétés connues.

1 - DEFINITION

Les polynômes $Y_{n_k}^s(x,k)$ et $Z_n^s(x,k)$, $n \in N$, $k \in N^*$ et $s > -1$, sont respectivement de degré n en x et x^k et peuvent être définis par les relations

$$Z_n^s(x,k) = \frac{\Gamma(kn+s+1)}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{x^{kj}}{\Gamma(kj+s+1)} \tag{II,1}$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^s Y_n^s(x,k) Z_m^s(x,k)\, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{\Gamma(kn+s+1)}{n!} & n = m \end{cases} \tag{II,2}$$

Compte tenu de la relation bien connue

$$\frac{\Gamma(kj+s+1)}{\Gamma(s+1)} = k^{jk} \left(\frac{s+1}{k}\right)_j \left(\frac{s+2}{k}\right)_j \cdots \left(\frac{s+k}{k}\right)_j \tag{II,3}$$

il est possible d'écrire $Z_n^s(x,k)$ à l'aide d'un polynôme hypergéométrique

$$Z_n^s(x,k) = \frac{\Gamma(kn+s+1)}{n!\,\Gamma(s+1)}\ {}_1F_k\left[-n;\ \frac{s+1}{k}, \frac{s+2}{k}, \cdots, \frac{s+k}{k};\ \left(\frac{x}{k}\right)^k\right] \tag{II,4}$$

Si k = 1, les polynômes se réduisent aux polynômes de Laguerre généralisés

$$Y_n^s(x,1) = Z_n^s(x,1) = L_n^s(x)$$

Si k = 2, on retrouve les polynômes introduits par SPENCER et FANO ([37]) en 1951 lors d'une étude sur la pénétration des rayons X dans la matière et étudiés plus tard par PREISER ([38]).

2 - POLYNOMES $Z_n^s(x,k)$

2.1 - Fonctions génératrices

La première fonction génératrice que nous établirons sera la suivante

$$\text{(II,5)} \qquad \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(kn+s+1)}\, Z_n^s(x,k) \dashv e^{\frac{1}{z}}\, {}_0F_k\left[-;\frac{s+1}{k},\frac{s+2}{k},\cdots,\frac{s+k}{k};-\left(\frac{x}{k}\right)^k z^{-1}\right]$$

en effet

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(kn+s+1)}\, Z_n^s(x,k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(n-j)!}\, \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(kj+s+1)}\, \frac{(-x^k)^j}{j!}$$

le théorème de convolution s'applique avec

$$g(n) = \frac{1}{n!} \dashv e^{\frac{1}{z}}$$

et, d'après (II, 3)

$$f(n) = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(kn+s+1)}\, \frac{(-x^k)^n}{n!} \dashv {}_0F_k\left[-;\frac{s+1}{k},\frac{s+2}{k},\cdots,\frac{s+k}{k};-\left(\frac{x}{k}\right)^k z^{-1}\right]$$

ce qui établit (II, 5).

La deuxième fonction génératrice sera

$$\text{(II,6)} \qquad \frac{(\alpha)_n\, \Gamma(s+1)}{\Gamma(kn+s+1)}\, Z_n^s(x,k) \dashv \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\alpha} {}_1F_k\left[\alpha;\frac{s+1}{k},\frac{s+2}{k},\cdots,\frac{s+k}{k};-\frac{x^k}{k^k(z-1)}\right]$$

En effet

$$\frac{(\alpha)_n\, \Gamma(s+1)}{\Gamma(kn+s+1)}\, Z_n^s(x,k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+\alpha-1}{n-j} f(j)$$

avec

$$f(j) = \Gamma(s+1)\, \frac{(\alpha)_j}{\Gamma(kj+s+1)}\, \frac{(-x^k)^j}{j!}$$

à l'aide de (II, 3) on établit

$$f(n) \dashv F(z) = {}_1F_k\left[\alpha;\frac{s+1}{k},\frac{s+2}{k},\cdots,\frac{s+k}{k};-\left(\frac{x}{k}\right)^k z^{-1}\right]$$

il suffit de faire usage de la correspondance (I, 70 b) pour obtenir (II, 6).

Dans le cas particulier k = 2, en faisant successivement

$$\alpha = \frac{s+1}{2} \quad , \quad \alpha = \frac{s+2}{2}$$

dans la relation (II, 6) on obtient deux fonctions génératrices inédites pour les polynômes de Spencer et Fano

$$\text{(II,7)} \qquad \frac{Z_n^s(x,2)}{\Gamma\left(n+\frac{s+2}{2}\right)} \dashv \left(\frac{z}{x^2}\right)^{\frac{s}{4}} \left(\frac{z}{z-4}\right)^{\frac{s+2}{4}} J_{\frac{s}{2}}\left(\frac{2x}{\sqrt{z-4}}\right)$$

(II, 8) $$\frac{Z_n^{\Delta}(x,2)}{\Gamma\left(n+\frac{\Delta+1}{2}\right)} \dashv \left(\frac{z}{x^2}\right)^{\frac{\Delta-1}{4}} \left(\frac{z}{z-4}\right)^{\frac{\Delta+5}{4}} J_{\frac{\Delta-1}{2}}\left(\frac{2x}{\sqrt{z-4}}\right)$$

Toujours dans ce cas particulier k = 2, PREISER ([38]) a établi une fonction génératrice pour les polynômes $Z_n^m(x, 2)$ lorsque $m \in N$. Nous allons généraliser le résultat de Preiser et montrer que l'on a $\forall k$

(II, 9) $$\frac{n!}{(kn+m)!} Z_n^m(x,k) \dashv \frac{z}{z-1}\left[u(z)\right]^{-m}\left\{\frac{1}{k}\left[(-1)^m I(k) e^{-u(z)} + 2\sum_{r=1}^{\leq \frac{k}{2}} e^{\alpha_r u(z)} \cos\left(\beta_r u(z) - \varphi_r\right)\right] - \sum_{j=1}^{\leq \frac{m}{k}} \frac{(-1)^j \left[u(z)\right]^{-jk}}{(m-jk)!}\right\} \quad m \in N$$

avec $$u(z) = x(z-1)^{-\frac{1}{k}} \qquad \alpha_r = \cos(2r-1)\frac{\pi}{k} \qquad \beta_r = \sin(2r-1)\frac{\pi}{k} \qquad \varphi_r = m\,\frac{2r-1}{k}\,\pi$$

$$I(k) = \begin{cases} 0 & k \text{ pair} \\ 1 & k \text{ impair} \end{cases}$$

En effet,

$$\frac{n!}{(kn+m)!} Z_n^m(x,k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-x^k)^j g(j)$$

avec

$$g(n) = f(kn) \qquad f(n) = \frac{1}{(n+m)!}$$

et, compte tenu des correspondances (I, 2) et (I, 70 b)

$$\frac{n!}{(kn+m)!} Z_n^m(x,k) \dashv \frac{z}{z-1} G\left(\frac{z-1}{-x^k}\right)$$

mais

$$f(n) \dashv F(z) = z^m e^{\frac{1}{z}} - \sum_{j=1}^{m} \frac{z^j}{(m-j)!}$$

à l'aide de la correspondance (I, 27) on en déduit la transformée de f(kn) soit G(z). Il vient

$$G\left(\frac{z-1}{-x^k}\right) = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k} F\left[x^{-1}(z-1)^{\frac{1}{k}} e^{i(2r-1)\frac{\pi}{k}}\right]$$

soit

(II, 10) $$\begin{cases} k\,G\left(\frac{z-1}{-x^k}\right) = \sum_{r=1}^{k} \left[u(z)\right]^{-m} e^{\alpha_r u(z) - i\left[\beta_r u(z) - \varphi_r\right]} - \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{(m-j)!} \left[u(z)\right]^{-j} \\ a_j = \sum_{r=1}^{k} e^{ij(2r-1)\frac{\pi}{k}} \end{cases}$$

a_j est nul sauf si $j = k, 2k, \ldots, \ell k, \ldots, qk \leqslant m$, auquel cas

$$a_{\ell k} = (-1)^{\ell} k$$

il suffit maintenant de remarquer que si $r' = k - r + 1$

$$\alpha_{r'} = \alpha_r \qquad\qquad u(z)\,\beta_{r'} - \varphi_{r'} = -\left[u(z)\,\beta_r - \varphi_r + 2m\pi\right]$$

puis de grouper les termes de rang r et r' dans la première somme de (II, 10) pour achever la démonstration.

La fonction génératrice (II, 9) peut prendre des formes élégantes et remarquablement simples ; ainsi par exemple

(II,9 a) $$\frac{n!}{(4n)!}\, Z_n^0(x,4) \dashv \frac{z}{z-1} \cos\frac{x}{\sqrt[4]{4(z-1)}}\, ch\frac{x}{\sqrt[4]{4(z-1)}}$$

(II,9 b) $$\frac{n!}{(4n+2)!}\, Z_n^2(x,4) \dashv x^{-2}\frac{z}{\sqrt{z-1}} \sin\frac{x}{\sqrt[4]{4(z-1)}}\, sh\frac{x}{\sqrt[4]{4(z-1)}}$$

2.2 - Relation de récurrence

De la fonction génératrice (II, 6) on déduit

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{\Gamma\left(n+\frac{\delta+1}{k}\right)}{\Gamma(kn+\delta+1)}\, Z_n^{\delta}(x,k)\right\} = k\left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{\frac{\Gamma\left(n+\frac{\delta+1}{k}+1\right)}{\Gamma(kn+\delta+2)}\, Z_n^{\delta+1}(x,k)\right\}$$

l'interprétation de cette égalité à l'aide de la correspondance (I, 3) sur les décalages conduit à

(II, 11) $$Z_n^{\delta+1}(x,k) - Z_n^{\delta}(x,k) = k\,\frac{\Gamma(kn+\delta+1)}{\Gamma[k(n-1)+\delta+2]}\, Z_{n-1}^{\delta+1}(x,k)$$

2.3 - Transformées de Laplace associées à $Z_n^s(t,k)$

A l'aide de (II, 1) et (II, 3) et compte tenu de la transformée de Laplace bien connue

$$L\left[t^{\alpha}\right] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \qquad \alpha > -1$$

on établit

(II, 12) $$L\left[t^{\nu} Z_n^{\delta}(t,k)\right] = \frac{\Gamma(kn+\delta+1)}{n!}\,\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\delta+1)}\,\frac{1}{p^{\nu+1}}\; {}_kF_k\left[-n, \frac{\nu+1}{k}, \ldots, \frac{\nu+k}{k}; \frac{\delta+1}{k}, \ldots, \frac{\delta+k}{k}; \frac{1}{p^k}\right] \qquad \nu > -1$$

Cette transformée de Laplace se simplifie si $\nu = s$

(II, 12 a) $$L\left[t^{\delta} Z_n^{\delta}(t,k)\right] = \frac{\Gamma(kn+\delta+1)}{n!}\,\frac{1}{p^{\delta+1}}\left(1-\frac{1}{p^k}\right)^n$$

De même, on peut établir

$$L\left[t^{\frac{\delta}{2}} Z_n^{\delta}(\sqrt{t}, 2k)\right] = 4^{kn}\,\Gamma\left(kn+\frac{\delta}{2}+1\right)\frac{1}{p^{\frac{\delta}{2}+1}}\; Z_n^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{1}{4p}, k\right) \tag{II, 13}$$

3 - POLYNOMES $Y_n^s(x,k)$

3.1 - Fonctions génératrices et représentation opérationnelle

CARLITZ ([42]) a établi la fonction génératrice

$$Y_n^{\delta}(x,k) \dashv \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{\delta+1}{k}} \exp\left\{-x\left[\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{1}{k}}-1\right]\right\} \tag{II, 14}$$

De la correspondance (I, 55 b) on déduit immédiatement l'intéressante représentation opérationnelle inédite

$$Y_n^{\delta}(x,k) = \frac{1}{n!}\, k^{-n}\, x^{-(kn+\delta+1)}\, e^{x}\left(x^{k+1}D\right)^n\left(x^{\delta+1}e^{-x}\right) \tag{II, 15}$$

En changeant s en $s + \sigma n$ dans (II, 15) on définit des pseudo-polynômes de Konhauser dont la fonction génératrice est donnée par la correspondance (I, 58a)

$$Y_n^{\delta+\sigma n}(x,k) \dashv \frac{k\,\Phi^{\delta+1}}{\sigma + k - \sigma\Phi^k}\, e^{-x(\Phi-1)} \qquad \Phi = \Phi(-k, \sigma-1; kz) \tag{II, 16}$$

Remarque

Les polynômes $Y_n^{s+\sigma n}(x,k)$ sont des polynômes de Sheffer de type A-zéro, ce qui généralise un résultat récent au sujet des pseudo-polynômes de Laguerre ([43-44]).

La relation (II, 15) peut encore s'écrire, en introduisant l'opérateur $\theta = x^k + {}^1D$ et après un simple changement de variable

$$\theta^n\left(x^{\delta+1}e^{-\lambda x}\right) = k^n\, x^{kn+\delta+1}\, e^{-\lambda x}\, n!\, Y_n^{\delta}(\lambda x, k) \tag{II, 17}$$

où λ ne dépend pas de x.

Il en résulte

$$\theta^{n+m}\left(x^{\delta+1}e^{-x}\right) = k^{n+m}\, x^{k(n+m)+\delta+1}\, e^{-x}\,(n+m)!\, Y_{n+m}^{\delta}(x,k)$$

mais

$$\theta^{n+m}\left(x^{\delta+1}e^{-x}\right) = \theta^n\left[\theta^m\left(x^{\delta+1}e^{-x}\right)\right] = \theta^n\left[k^m x^{km+\delta+1} e^{-x}\, m!\; Y_m^{\delta}(x,k)\right]$$

d'où

$$\theta^n\left[x^{km+\delta+1}\, e^{-x}\, Y_m^{\delta}(x,k)\right] = k^n\, x^{k(n+m)+\delta+1}\, e^{-x}\, \frac{(n+m)!}{m!}\, Y_{n+m}^{\delta}(x,k) \tag{II, 18}$$

et par conséquent

$$\binom{n+m}{m} Y_{n+m}^{\Delta}(x,k) = x^{-(km+\Delta+1)} e^{x} (kx^{k})^{-n} \frac{\theta^{n}}{n!} [\varphi(x)]$$

$$\varphi(x) = x^{km+\Delta+1} e^{-x} Y_{m}^{\Delta}(x,k)$$

de la correspondance (I, 55 b) on déduit alors la fonction génératrice

$$\text{(II, 19)} \qquad \binom{n+m}{m} Y_{n+m}^{\Delta}(x,k) \dashv \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{\Delta+1}{k}+m} Y_{m}^{\Delta}\left[x\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{1}{k}}, k\right] \exp\left\{-x\left[\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{1}{k}} - 1\right]\right\}$$

si m = 0 on retrouve la fonction génératrice de Carlitz.

Considérons (II, 16) avec $\sigma = -k$ soit

$$Y_{n}^{\Delta-kn}(x,k) \dashv \Phi^{\Delta+1-k} e^{-x(\Phi-1)} \qquad \Phi = \Phi(-k,-k-1;kz) = (1+z^{-1})^{\frac{1}{k}}$$

après multiplication des deux membres par $x^{s+1}e^{-x}$ et application de l'opérateur θ^{m}, on a

$$\theta^{m}\left[x^{\Delta+1} e^{-x} Y_{n}^{\Delta-kn}(x,k)\right] \dashv \Phi^{\Delta+1-k} \theta^{m}\left(x^{\Delta+1} e^{-x\Phi}\right)$$

en ce qui concerne le membre de gauche, remarquons que d'après (II, 18)

$$\theta^{m}\left[x^{\Delta+1} e^{-x} Y_{n}^{\Delta-kn}(x,k)\right] = k^{m} x^{km+\Delta+1} e^{-x} \frac{(n+m)!}{n!} Y_{n+m}^{\Delta-kn}(x,k)$$

quant au membre de droite il s'interprète à l'aide de (II, 17) ; on obtient finalement la fonction génératrice

$$\text{(II, 20)} \qquad \binom{n+m}{m} Y_{n+m}^{\Delta-kn}(x,k) \dashv (1+z^{-1})^{\frac{\Delta+1}{k}-1} Y_{m}^{\Delta}\left[x(1+z^{-1})^{\frac{1}{k}}, k\right] \exp\left\{-x\left[(1+z^{-1})^{\frac{1}{k}} - 1\right]\right\}$$

Considérons maintenant l'ensemble de polynômes $\{g_{n}^{r}(y)\}$ étudié par BRAGG ([45]) et ainsi défini

$$\frac{g_{n}^{r}(y)}{n!} \dashv e^{\frac{ry}{z} - \frac{1}{z^{r}}} \qquad r \geq 2 \text{ entier}$$

Changeons z en z/x, multiplions par $x^{\Delta+1} \exp(-\frac{r\,x\,y}{z})$ et appliquons l'opérateur θ^{m}

$$\theta^{m}\left[x^{\Delta+1} e^{-\left(\frac{x}{z}\right)^{r}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \frac{g_{n}^{r}(y)}{n!} \theta^{m}\left(x^{n+\Delta+1} e^{-\frac{rxy}{z}}\right)$$

le membre de gauche peut s'écrire en développant l'exponentielle

$$\theta^{m}\left[x^{\Delta+1} e^{-\left(\frac{x}{z}\right)^{r}}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(-\frac{1}{z^{r}}\right)^{j} \theta^{m}\left(x^{jr+\Delta+1}\right) = k^{m} x^{km+\Delta+1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Delta+1+jr}{k}\right)_{m} \frac{1}{j!}\left(\frac{-x}{z}\right)^{jr}$$

il ne reste qu'à interpréter le membre de droite à l'aide de (II, 17), puis à changer z en xz et enfin à poser r = kq ($q \in N^{*}$) pour obtenir la relation

$$(II,21)\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\,\frac{g_n^{kq}(y)}{n!}\,Y_n^{\delta+n}\left(\frac{kqy}{z},k\right)=\frac{\left(\frac{\delta+1}{k}\right)_m}{m!}\,e^{\frac{kqy}{z}}\,{}_qF_q\left[\frac{mk+\delta+1}{kq},\dots,\frac{(m+q-1)k+\delta+1}{kq};\frac{\delta+1}{kq},\frac{k+\delta+1}{kq},\dots,\frac{(q-1)k+\delta+1}{kq};-\frac{1}{z^{kq}}\right]$$

Si k = 1 et q = 2 on retrouve une relation connue entre polynômes de Laguerre et d'Hermite ([30]).

3.2 - Théorème d'addition pour $Y_n^S(x,k)$

D'après (II, 14), en posant $v(z)=\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{1}{k}}$

$$Y_n^{\delta}(x+y,k)\;\dashv\;[v(z)]^{\alpha+1}e^{-x[v(z)-1]}\,[v(z)]^{\beta+1}e^{-y[v(z)-1]}\qquad \alpha+\beta=\delta-1$$

si $\alpha > -1$ et $\beta > -1$, cette relation interprétée suivant la propriété dite de convolution réelle signifie

$$(II,22)\qquad Y_n^{\delta}(x+y,k)=\sum_{j=0}^{n} Y_j^{\alpha}(x,k)\,Y_{n-j}^{\beta}(y,k)\qquad \alpha+\beta=\delta-1$$

3.3 - Relations de récurrence

Considérons à nouveau la fonction génératrice (II, 14). A l'aide de (I, 87) on en déduit la relation de récurrence

$$(II,23)\qquad k(n+1)\,Y_{n+1}^{\delta}(x,k)=(kn+\delta+1)\,Y_n^{\delta}(x,k)-x\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(\frac{1}{k}\right)_j}{j!}\,Y_{n-j}^{\delta}(x,k)$$

puisque

$$B(z)=-x\left[\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{1}{k}}-1\right]\;\vdash\;b(n)=\begin{cases}0 & n=0\\ -x\,\dfrac{\left(\frac{1}{k}\right)_n}{n!} & n\geq 1\end{cases}$$

de même, à l'aide de (I, 101), on en déduit la relation de récurrence

$$(II,24)\qquad n\,Y_n^{\delta}(x,k)=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\delta+1}{k}-x\,\frac{\left(\frac{1}{k}\right)_j}{(j-1)!}\right]Y_{n-j}^{\delta}(x,k)$$

3.4 - Dérivées et intégrales associées à $Y_n^S(x,k)$

Les dérivées successives de $e^{-x}Y_n^S(x,k)$ sont données par

$$(II,25)\qquad D^j\left[e^{-x}Y_n^{\delta}(x,k)\right]=(-1)^j e^{-x}\,Y_n^{\delta+j}(x,k)$$

en effet

$$e^{-x}\,Y_n^{\delta}(x,k)\;\dashv\;[v(z)]^{\delta+1}\,e^{-xv(z)}\qquad v(z)=\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

après j dérivations

$$D^j\left[e^{-x}\,Y_n^s(x,k)\right] \dashv (-1)^j\left[v(z)\right]^{s+j+1} e^{-x\,v(z)} = Z\left\{(-1)^j e^{-x}\,Y_n^{s+j}(x,k)\right\}$$

relation qui établit (II, 25).

La relation (II, 25) peut encore s'écrire

$$\frac{(-1)^n}{n!}\,e^{-x}\,Y_m^{s+n}(x,k) = \frac{1}{n!}\,D^n\left[e^{-x}\,Y_m^s(x,k)\right]$$

on en déduit, à l'aide de la correspondance (I, 35), la fonction génératrice

(II,26) $$\frac{1}{n!}\,Y_m^{s+n}(x,k) \dashv e^{\frac{1}{z}}\,Y_m^s\left(x-\frac{1}{z},k\right)$$

La relation (II, 25) permet aussi d'établir

(II,27) $$\int_a^b e^{-x}\,Y_n^s(x,k)\,dx = e^{-a}\,Y_n^{s-1}(a,k) - e^{-b}\,Y_n^{s-1}(b,k) \qquad s>0$$

il suffit de remarquer que $\left[-\,e^{-x}Y_n^{s-1}(x,k)\right]$ est une primitive de $e^{-x}Y_n^s(x,k)$.

4 - DEVELOPPEMENT D'UNE FONCTION f(t) EN SERIE DE POLYNOMES DE KONHAUSER

Nous supposerons que les fonctions envisagées admettent un tel développement en série uniformément convergent.

4.1 - Développement en série de polynômes $Z_n^s(t,k)$

Si l'on désire développer une fonction f(t) en série de polynômes $Z_n^s(t,k)$ il est nécessaire de calculer l'intégrale dont nous supposerons l'existence

(II,28) $$f_{s,k}^*(n) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^s\,Y_n^s(t,k)\,f(t)\,dt$$

Nous allons établir que la transformée Z de $f_{s,k}^*(n)$ se déduit de la transformée de Laplace $F_s(p)$ de $t^s f(t)$ par la relation

(II,29) $$f_{s,k}^*(n) \dashv \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{s+1}{k}} F_s\left[\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{1}{k}}\right]$$

en effet,

$$f_{s,k}^*(n) \dashv \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\int_0^\infty e^{-t}t^s\,Y_n^s(t,k)\,f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,t^s f(t)\left[\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\,Y_n^s(t,k)\right]dt$$

et, d'après (II, 14)

$$f_{s,k}^*(n) \dashv \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{s+1}{k}} \int_0^\infty e^{-t\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{1}{k}}}\,t^s f(t)\,dt$$

relation équivalente à (II, 29).

La correspondance (II, 29) permet, en s'appuyant sur les tables de transformées de Laplace et de transformées Z, de calculer de nombreuses intégrales de la forme (II, 28).

Exemple 1

Soit $f(t) = t^{\nu}$

$$F_s(p) = L\left[t^{s+\nu}\right] = \frac{\Gamma(s+\nu+1)}{p^{s+\nu+1}} \qquad s+\nu > -1$$

d'où

$$f^*_{s,k}(n) \dashv \Gamma(s+\nu+1)\left(\frac{z}{z-1}\right)^{-\frac{\nu}{k}}$$

et par conséquent

$$f^*_{s,k}(n) = \Gamma(s+\nu+1)\frac{\left(-\frac{\nu}{k}\right)_n}{n!}$$

Exemple 2

Soit f(t) la fonction retardée

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < x \qquad x \geq 0 \\ t^{-s}(t-x)^{\nu} & t > x \qquad \nu > -1 \end{cases}$$

Compte tenu de

$$F_s(p) = e^{-px}\,\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$$

on obtiendra

(II,30) $$\int_x^{\infty} e^{-t}(t-x)^{\nu}\,Y_n^s(t,k)\,dt = \Gamma(\nu+1)e^{-x}\,Y_n^{s-\nu-1}(x,k) \qquad x \geq 0,\ s > \nu > -1$$

Exemple 3

En désignant par $D_{\nu}(t)$ la fonction de Weber-Hermite, on établirait de même à l'aide de (II, 29)

(II,31) $$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-\nu}e^{-\frac{x^2}{8t}}D_{2\nu-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)Y_n^{\nu}(t,k)\,dt = 2^{\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,e^{-x}\,Y_n^{2s+2\nu-1}(x,2k)$$

Si $2\nu - 1 = m \in \mathbb{N}$ la relation (II, 31) devient

(II,32) $$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-\frac{m+1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}H_m\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)Y_n^{\nu}(t,k)\,dt = 2^{\frac{m}{2}}\sqrt{\pi}\,e^{-x}\,Y_n^{s+m}(x,2k)$$

où H_m désigne le polynôme d'Hermite.

Dans le cas particulier k = 1, (II, 32) se réduit à une relation inédite entre les polynômes de Laguerre, d'Hermite et de Spencer et Fano.

4.2 - Développement en série de polynômes $Y_n^s(t,k)$

Si l'on désire développer une fonction f(t) en série de polynômes $Y_n^s(t,k)$ il est nécessaire de calculer l'intégrale dont nous supposerons l'existence

(II,33) $$\hat{f}_{s,k}(n) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^s\, Z_n^s(t,k)\, f(t)\, dt$$

En procédant comme précédemment, à l'aide des fonctions génératrices établies au § 2.1 il est possible d'obtenir des relations facilitant théoriquement le calcul de $\hat{f}_{s,k}(n)$; mais pratiquement les relations obtenues sont inexploitables dans le cas général en raison de leur grande complexité. Cependant, dans certains cas particuliers on obtient des relations intéressantes. Ainsi, par exemple, si m = 0 et k = 2, (II, 9) devient

(II,9 c) $$\frac{n!}{(2n)!}\, Z_n^0(t,2) \dashv \frac{z}{z-1} \cos \frac{t}{\sqrt{z-1}}$$

Considérons

(I,33 a) $$\hat{f}_{0,2}(n) = \int_0^\infty e^{-t}\, Z_n^0(t,2)\, f(t)\, dt$$

de la propriété bien connue pour la transformation de Laplace

$$L\left[f(t)\cos \omega t\right] = \frac{F(p+i\omega) + F(p-i\omega)}{2} \qquad F(p) = L\left[f(t)\right]$$

on déduit alors

(I,34) $$\frac{n!}{(2n)!}\, \hat{f}_{0,2}(n) \dashv \frac{z}{z-1}\, \frac{F\left(1-\frac{i}{\sqrt{z-1}}\right) + F\left(1+\frac{i}{\sqrt{z-1}}\right)}{2}$$

Cette correspondance permet dans de nombreux cas de simplifier le calcul des coefficients intervenant dans le développement d'une fonction f(t) en série de polynômes $Y_n^0(t,2)$ de Spencer et Fano .

Exemple

Soit $f(t) = e^{-at}$ c'est-à-dire $F(p) = \frac{1}{p+a}$

Il vient

$$\frac{n!}{(2n)!}\, \hat{f}_{0,2}(n) \dashv \frac{1}{a+1}\, \frac{z}{z-\left[1-(a+1)^{-2}\right]}$$

d'où

$$\frac{n!}{(2n)!}\, \hat{f}_{0,2}(n) = \frac{1}{a+1}\left[1-(a+1)^{-2}\right]^n$$

Divers autres cas particuliers que nous n'envisagerons pas conduisent à des résultats analogues aisément exploitables.

CHAPITRE II

NOUVELLES FONCTIONS GENERATRICES ASSOCIEES A QUELQUES FONCTIONS SPECIALES

Nous nous limiterons à quelques exemples que nous avons publiés aux Comptes Rendus ([6-12-41-49])

1 - POLYNOMES DE CHATTERJEA

Une généralisation des polynômes de Laguerre, différente de celle de Konhauser, a été envisagée par CHATTERJEA ([46]) à partir de la définition

$$T_{kn}^{\delta}(x) = x^{-\delta} e^{x^k} \frac{1}{n!} D^n \left(x^{n+\delta} e^{-x^k} \right) \tag{II,35}$$

en changeant s en s + σ n on définit des pseudo-polynômes de Chatterjea dont la fonction génératrice se déduit immédiatement de (I, 44)

$$T_{kn}^{\delta+\sigma n}(x) \dashv \frac{\Phi_1^{\delta+1}}{\sigma+1-\sigma\Phi_1} \exp\left[-x^k(\Phi_1^k - 1)\right] \qquad \Phi_1 = \Phi(1,\sigma;z) \tag{II,36}$$

D'après la correspondance (I, 55 b)

$$x^{-(n+1)} \frac{1}{n!} (x^2 D)^n \left[x f(x) \right] \dashv \frac{z}{z-1} f\left(x \frac{z}{z-1} \right)$$

mais d'après la correspondance (I, 36)

$$\frac{1}{n!} D^n \left[x^n f(x) \right] \dashv \frac{z}{z-1} f\left(x \frac{z}{z-1} \right)$$

d'où la relation générale

$$D^n \left[x^n f(x) \right] = x^{-(n+1)} \theta_1^n \left[x f(x) \right] \qquad \theta_1 = x^2 D \tag{II,37}$$

on déduit alors de (I, 35) l'intéressante représentation opérationnelle inédite

$$T_{kn}^{\delta}(x) = x^{-(n+\delta+1)} e^{x^k} \frac{1}{n!} \theta_1^n \left(x^{\delta+1} e^{-x^k} \right) \tag{II,38}$$

qu'il convient de rapprocher de (II, 15). L'étude précédemment développée au sujet des polynômes $Y_n^S(x,k)$ pourrait être reprise pour les polynômes $T^S{}_{kn}(x)$ à l'aide de (II, 38). On obtiendrait, entre autres, la fonction génératrice

$$\binom{n+m}{m} T_{k(n+m)}^{\delta}(x) \dashv \left(\frac{z}{z-1} \right)^{m+\delta+1} T_{km}^{\delta}\left(x \frac{z}{z-1} \right) \exp\left\{ -x^k \left[\left(\frac{z}{z-1} \right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right] \right\} \qquad m \in \mathbb{N} \tag{II,39}$$

2 - POLYNOMES $A_n^s(x)$

Ces polynômes ont été étudiés par TOSCANO ([47]) qui indique

(II,40) $$A_n^\delta(x) \dashv e^{\frac{\delta}{z}} \exp\left[x\left(1-e^{\frac{1}{z}}\right)\right]$$

(II,41) $$A_n^\delta(x) = x^{-\delta} e^x \frac{1}{n!} (xD)^n \left(x^\delta e^{-x}\right)$$

à l'aide de cette dernière relation, en procédant comme pour les polynômes $Y_n^s(x,k)$ et en faisant usage de la correspondance (I, 55 c) on établit

(II,42) $$\binom{n+m}{m} A_{n+m}^\delta(x) \dashv e^{\frac{\delta}{z}} A_m^\delta\left(xe^{\frac{1}{z}}\right) \exp\left[-x\left(e^{\frac{1}{z}}-1\right)\right]$$

à l'aide de (II, 41) et de la correspondance (I, 58 b) ou à l'aide de (II, 40) et de la correspondance (I, 78) on établit

(II,43) $$A_n^{\delta+\sigma n}(x) \dashv \frac{z\left[\Phi(0,\sigma-1;z)\right]^\delta}{z-\sigma\left[\Phi(0,\sigma-1;z)\right]^\sigma} \exp\left\{-x\left[\Phi(0,\sigma-1;z)-1\right]\right\}$$

Remarque

Les polynômes $A_n^{s+\sigma n}(x)$ sont des polynômes de Sheffer de type A-zéro.

3 - POLYNOMES DE BESSEL

Considérons les polynômes de Bessel introduits par KRALL et FRINK ([48])

(II,44) $$\begin{cases} y_n(x,a,b) = b^{-n} x^{2-a} e^{\frac{b}{x}} D^n\left(x^{2n+a-2} e^{-\frac{b}{x}}\right) & b\neq 0\,;\ a\neq -1,-2,\cdots \\ y_n^*(x,a,b) = x^n y_n(x,a,b) \end{cases}$$

la correspondance (I, 44) fournit la fonction génératrice

(II,45) $$\frac{y_n^*(x,a+\sigma n,b)}{n!} \dashv \frac{\left[\Phi(1,\sigma+1;bz)\right]^{a-1}}{\sigma+2-(\sigma+1)\Phi(1,\sigma+1;bz)} \exp\left\{xb\left[1-\frac{1}{\Phi(1,\sigma+1;bz)}\right]\right\}$$

Remarque

Les polynômes $\frac{y_n^*(x,a+\sigma n,b)}{n!}$ sont des polynômes de Sheffer de type A-zéro.

4 - POLYNOMES ET SERIES HYPERGEOMETRIQUES

Nous supposerons que les fonctions génératrices envisagées existent et nous poserons $\Phi_1 = \Phi(1,\sigma\ ;\ z)$. Considérons

(II,46) $$f(n) = \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \left[\frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}\right]^n \frac{(-x)^n}{n!} \quad , \quad \left[\frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}\right]_{m=0} = 1$$

(II, 47) $$\mathcal{P}_n^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{(\sigma+1)n + mj + \alpha}{n-j} f(j) \qquad m \in \mathbb{N}$$

après quelques transformations élémentaires

(II, 48 a) $$\mathcal{P}_n^{(m)}(x) = \binom{(\sigma+1)n+\alpha}{n}\, {}_{p+m+1}F_{q+m+1}\left[\begin{matrix} -n, \frac{(\sigma+1)n+\alpha+1}{m}, \cdots, \frac{(\sigma+1)n+\alpha+m}{m}, a_1, \cdots, a_p \; j \\ \frac{\sigma n+\alpha+1}{m+1}, \cdots, \frac{\sigma n+\alpha+m+1}{m+1}, b_1, \cdots, b_q \; j \end{matrix} \; x \right], \quad m \in \mathbb{N}^*$$

(II, 48 b) $$\mathcal{P}_n^{(0)}(x) = \binom{(\sigma+1)n+\alpha}{n}\, {}_{p+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix} -n, a_1, \cdots, a_p \; j \\ \sigma n+\alpha+1, b_1, \cdots, b_q \; j \end{matrix} \; x \right]$$

de la correspondance (I, 70) on déduit alors la fonction génératrice

(II, 49) $$\mathcal{P}_n^{(m)}(x) \dashv \frac{\Phi_1^{\alpha+1}}{\sigma+1-\sigma\Phi_1}\, {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1, \cdots, a_p \; j \\ b_1, \cdots, b_q \; j \end{matrix} \; -\frac{(m+1)^{m+1}}{m^m} \frac{x}{y} \Phi_1^{m+\sigma+1} \right], \quad m \in \mathbb{N}$$

si m = 0 on retrouve un résultat établi par SRIVASTAVA ([23]).

Considérons maintenant les polynômes et fonctions suivantes

(II, 50 a) $$\Pi_n^{(m)}(x) = \binom{(\sigma+1)n+\alpha}{n}\, {}_{p+m+1}F_{q+m+1}\left[\begin{matrix} -n, \frac{(\sigma+1)n+\alpha}{m}, \cdots, \frac{(\sigma+1)n+\alpha+m-1}{m}, a_1, \cdots, a_p \; j \\ \frac{\sigma n+\alpha+1}{m+1}, \cdots, \frac{\sigma n+\alpha+m+1}{m+1}, b_1, \cdots, b_q \; j \end{matrix} \; x \right], \quad m \in \mathbb{N}^*$$

(II, 50 b) $$\Pi_n^{(0)}(x) = \mathcal{P}_n^{(0)}(x)$$

(II, 51) $$\Psi_n^{(m)}(x) = \binom{(\sigma+1)n+\alpha}{n}\, {}_{p+m}F_{q+m}\left[\begin{matrix} \frac{(\sigma+1)n+\alpha+1}{m}, \cdots, \frac{(\sigma+1)n+\alpha+m}{m}, a_1, \cdots, a_p \; j \\ \frac{\sigma n+\alpha+1}{m}, \cdots, \frac{\sigma n+\alpha+m}{m}, b_1, \cdots, b_q \; j \end{matrix} \; x \right], \quad m \in \mathbb{N}^*$$

(II, 52) $$\overline{\Psi}_n^{(m)} = \binom{(\sigma+1)n+\alpha}{n}\, {}_{p+m}F_{q+m}\left[\begin{matrix} \frac{(\sigma+1)n+\alpha}{m}, \cdots, \frac{(\sigma+1)n+\alpha+m-1}{m}, a_1, \cdots, a_p \; j \\ \frac{\sigma n+\alpha+1}{m}, \cdots, \frac{\sigma n+\alpha+m}{m}, b_1, \cdots, b_q \; j \end{matrix} \; x \right], \quad m \in \mathbb{N}^*$$

En procédant comme précédemment et en faisant successivement usage des correspondances (I,72 a), (I,71) et (I,73 a) on obtient les fonctions génératrices

$$\text{(II, 53)} \qquad \frac{\alpha}{(\sigma+1)n+\alpha}\,\Pi_n^{(m)}(x) \dashv \Phi_1^{\alpha}\,{}_{p+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix}\frac{\alpha}{\sigma+m+1}, a_1, \cdots, a_p\,;\\ \frac{\alpha}{\sigma+m+1}+1, b_1, \cdots, b_q\,;\end{matrix} -\frac{x}{z}\frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}\Phi_1^{m+\sigma+1}\right] \qquad m\in N$$

$$\text{(II, 54)} \qquad \Psi_n^{(m)}(x) \dashv \frac{\Phi_1^{\alpha+1}}{\sigma+1-\sigma\Phi_1}\,{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1, \cdots, a_p\,;\\ b_1, \cdots, b_q\,;\end{matrix} x\Phi_1^m\right] \qquad m\in N^*$$

$$\text{(II, 55)} \qquad \frac{\alpha}{(\sigma+1)n+\alpha}\,\overline{\Psi}_n^{(m)}(x) \dashv \Phi_1^{\alpha}\,{}_{p+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix}\frac{\alpha}{m}, a_1, \cdots, a_p\,;\\ \frac{\alpha}{m}+1, b_1, \cdots, b_q\,;\end{matrix} x\Phi_1^m\right] \qquad m\in N^*$$

En faisant $m = 0$ et $\sigma = -\frac{1}{2}$ dans (II, 53) on retrouve un résultat récent ([11]). Notons qu'en particularisant les relations précédentes, on obtient des fonctions génératrices pour les polynômes classiques. Ainsi, par exemple, en faisant $m = q = 0$ et $p = 1$ dans (II, 53) on obtiendra pour les pseudo-polynômes de Jacobi la fonction génératrice inédite

$$\text{(II, 56)} \qquad \frac{\alpha}{(\sigma+1)n+\alpha}\,P_n^{\alpha+\sigma n,\,\beta-(\sigma+1)n}(x) \dashv \Phi_1^{\alpha}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{\alpha}{\sigma+1}, \alpha+\beta+1\,;\\ \frac{\alpha}{\sigma+1}+1\,;\end{matrix} \frac{1-x}{2}\left(1-\Phi_1\right)\right]$$

et avec $m = q = p = 0$ on obtiendra pour les pseudo-polynômes de Laguerre

$$\text{(II, 57)} \qquad \frac{\alpha}{(\sigma+1)n+\alpha}\,L_n^{\alpha+\sigma n}(x) \dashv \Phi_1^{\alpha}\,{}_1F_1\left[\begin{matrix}\frac{\alpha}{\sigma+1}\,;\\ \frac{\alpha}{\sigma+1}+1\,;\end{matrix} x\left(1-\Phi_1\right)\right]$$

5 - POLYNOMES DE GOTTLIEB GENERALISES

En 1970 nous avons introduit ([49]) les polynômes

$$G_n(x, c, t) = {}_2F_1\left(-n, c+x\,;\, c\,;\, 1-e^{-t}\right)$$

Ces polynômes sont orthogonaux en x pour $c > 0$ et $t \neq 0$. Si $c = 1$ on retrouve les polynômes de Gottlieb, cités par RAINVILLE [([14]), p. 303].

La correspondance (I, 50) permettant de relier certaines fonctions génératrices à des formules de type Rodrigues, compte tenu de

$$\frac{(c)_n\, G_n(x, c, t)}{n!} \dashv \frac{z^c\,(z-1)^x}{\left(z-e^{-t}\right)^{c+x}}$$

conduit à la relation

$$G_n(x,c,t) = \frac{e^{t(x-n)}}{(c)_n (1-e^{-t})^{c-1}} \left(e^t \frac{d}{dt}\right)^n \left[e^{-xt} (1-e^{-t})^{n+c-1} \right]$$

Nous pensons avoir montré, à l'aide des exemples qui précèdent, que l'utilisation du symbolisme de la transformation Z, outre une simplification d'écriture, confère à la théorie des fonctions génératrices une efficacité nouvelle; en particulier certaines des propriétés originales que nous avons établies pour la transformation Z s'avèrent extrêmement précieuses pour l'étude des fonctions spéciales. Bien qu'il serait encore possible d'établir d'innombrables relations inédites, nous clorons ici l'exposé de la deuxième partie de notre travail.

T R O I S I E M E P A R T I E

TRANSFORMATION Z, TRANSFORMATION DE LAGUERRE ET TRANSFORMATION DE LAPLACE APPLICATIONS EN THEORIE DES SIGNAUX ET SYSTEMES

CHAPITRE PREMIER

TRANSFORMATION DE LAGUERRE

La notion de transformée de Laguerre telle que nous la définissons ci-dessous nous a été suggérée par nos recherches sur l'inversion numérique de la transformation de Laplace à l'aide des polynômes de Laguerre. La transformation proposée possède des propriétés séduisantes qui en font une méthode d'analyse des signaux et systèmes particulièrement bien adaptée au traitement sur calculateur numérique.

1 - INTRODUCTION ET DEFINITIONS

Nous appellerons transformée de Laguerre d'une fonction f(t) de la variable réelle $t \geqslant 0$, la fonction de la variable discrète $n \in \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$, notée $f_n(\alpha, \beta)$ et ainsi définie

$$f_n(\alpha,\beta) = \mathcal{L}_n^{\alpha,\beta}\left\{f(t)\right\} = \beta \int_0^\infty e^{-(\beta-\alpha)t} L_n(\beta t) f(t)\, dt \qquad \text{(III, 1)}$$

$L_n(t)$ étant le polynôme de Laguerre de degré n

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-t)^j}{j!}$$

α désignant un paramètre réel positif, négatif ou nul et β un paramètre strictement positif.

Nous appellerons spectre de Laguerre de f(t) l'ensemble $\left\{f_n(\alpha, \beta)\right\}$ et nous écrirons symboliquement

$$f(t) \;\lrcorner\; f_n(\alpha,\beta)$$

ou encore

$$f_n(\alpha,\beta) \;\llcorner\; f(t)$$

L'existence de la transformée de Laplace F(p) de f(t) pour $p = \beta - \alpha$ assure l'existence de la transformée de Laguerre $f_n(\alpha,\beta)$ puisque $L_n(\beta t)$ est un polynôme de degré n en t. Au cours de l'étude qui va suivre, les conditions d'existence de la transformée de Laguerre seront supposées satisfaites pour les fonctions envisagées. Les diverses relations seront écrites avec la convention $L_n(t) \equiv 0$ et $f_n(\alpha,\beta) \equiv 0$ pour $n < 0$.

Pour le choix particulier ($\alpha = 0$, $\beta = 1$) on retrouve la transformation étudiée par MAC CULLY ([50]) en 1957. Cependant, Mac Cully a développé cette transformation en vue de son application à la résolution de certaines équations aux dérivées partielles et les propriétés fondamentales qui font de la transformation une méthode possible d'analyse en théorie des signaux et systèmes ne sont guère indiquées par cet auteur. C'est en 1968 que nous avons publié de telles propriétés ([51]) puis appliqué nos résultats relatifs à la transformation $\mathcal{L}_n^{0,1}$ au problème de l'inversion numérique de la transformation de Laplace à l'aide des polynômes de Laguerre ([52]). C'est ainsi que, dans un souci d'efficacité pratique, nous avons été amenés à définir puis à étudier la transformation plus générale $\mathcal{L}_n^{\alpha,\beta}$. Il convient de noter que seules les relations (III, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12) sont indiquées par Mac Cully dans le cas particulier ($\alpha = 0$, $\beta = 1$) et que par conséquent toutes les autres relations sont nouvelles, même dans le cas particulier précédemment cité.

Enfin, il convient de signaler une étude récente de BOZZO ([53]), très voisine de notre cas particulier ($\alpha = 1$, $\beta = 2$) et qui semble ignorer nos travaux antérieurs.

2 - RELATION ENTRE TRANSFORMEE Z, TRANSFORMEE DE LAGUERRE ET TRANSFORMEE DE LAPLACE

Compte tenu de la correspondance bien connue

$$L_n(\beta t) \dashv \frac{z}{z-1} e^{-\frac{\beta t}{z-1}}$$

et de la relation de définition (III, 1), il vient

$$f_n(\alpha,\beta) \dashv \beta \int_0^\infty e^{-(\beta-\alpha)t} \left(\frac{z}{z-1} e^{-\frac{\beta t}{z-1}} \right) f(t)dt$$

ou encore

$$f_n(\alpha,\beta) \dashv \frac{\beta z}{z-1} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\beta z}{z-1}-\alpha\right)t} f(t)\,dt$$

introduisons la transformée de Laplace F(p) de f(t)

$$f(t) \supset F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$$

nous obtenons la relation fondamentale suivante

(III,2)
$$f_n(\alpha,\beta) \dashv \frac{\beta z}{z-1} F\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right)$$

qui peut encore s'écrire

(III,2 bis) $$f_n(\alpha,\beta) = Z^{-1}\left\{\frac{\beta z}{z-1} F\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right)\right\}$$

Cette relation fournit une méthode efficace pour le calcul de la transformée de Laguerre d'une fonction f(t) dont on connait la transformée de Laplace F(p), le problème se ramenant alors à celui de l'inversion d'une transformée Z.

Considérons par exemple la fonction

$$f(t) = e^{-at}$$

dont la transformée de Laplace s'écrit

$$F(p) = \frac{1}{p+a} \qquad (p > -a)$$

d'après (III, 2)

$$f_n(\alpha,\beta) \dashv \frac{\beta z}{z-1} \frac{1}{\frac{\beta z}{z-1} - \alpha + a} = \frac{\beta}{\beta+a-\alpha} \frac{z}{z - \frac{a-\alpha}{\beta+a-\alpha}} \qquad (\beta-\alpha > -a)$$

et par conséquent

$$f_n(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\beta+a-\alpha}\left(\frac{a-\alpha}{\beta+a-\alpha}\right)^n \qquad (\beta-\alpha > -a)$$

C'est en suivant cette méthode que nous avons élaboré une table de transformées de Laguerre pour quelques fonctions usuelles, table que nous reproduisons en annexe. Cette table donne également, pour chaque fonction envisagée, une relation de récurrence déduite de (III, 2) et généralement avantageuse pour le calcul numérique de la transformée de Laguerre.

De nombreux exemples numériques seront traités au cours du chapitre III.

La relation (III, 2) permet non seulement de simplifier le calcul de nombreuses transformées de Laguerre mais encore elle permet d'établir aisément de nombreuses propriétés comme nous le verrons au cours des paragraphes qui suivent. Ces propriétés permettent d'étendre rapidement notre table de transformées de Laguerre.

Avant de clore ce paragraphe, signalons une relation d'intérêt théorique entre la transformée de Laguerre et les dérivées succesives de la transformée de Laplace. Un simple rapprochement des formules (III, 2) et (I, 36) conduit en effet à la relation

(III,3 a) $$f_n(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{n!} \frac{d^n}{d\beta^n}\left[\beta^n F(\beta-\alpha)\right]$$

qui peut encore s'écrire

(III,3 b) $$f_n(\alpha,\beta) = \beta \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{\beta^j}{j!} F^{(j)}(\beta-\alpha)$$

et, en particulier

$$f_0(\alpha,\beta) = \beta\, F(\beta-\alpha)$$

3 - PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION DE LAGUERRE

3·1- Linéarité

Les deux propriétés suivantes sont évidentes

$$\text{(III,4)} \qquad \begin{cases} f(t)+g(t) \;\rightharpoonup\; f_n(\alpha,\beta)+g_n(\alpha,\beta) \\ a\,f(t) \;\rightharpoonup\; a\,f_n(\alpha,\beta) \end{cases}$$

a désignant une constante.

3·2- Changement d'échelle

De la relation de définition on déduit très simplement

$$\text{(III,5)} \qquad f\left(\frac{t}{a}\right) \;\rightharpoonup\; f_n(a\beta,\, a\alpha)$$

3·3- Amortissement

De même, on vérifie aisément

$$\text{(III,6)} \qquad e^{-at} f(t) \;\rightharpoonup\; f_n(\alpha-a,\beta)$$

3·4- Multiplication par t

En faisant usage, dans la relation de définition, de la formule de récurrence bien connue

$$t\,L_n(t) = -(n+1)\,L_{n+1}(t) + (2n+1)\,L_n(t) - n\,L_{n-1}(t)$$

on établit la correspondance

$$\text{(III,7)} \qquad t\,f(t) \;\rightharpoonup\; -\frac{1}{\beta}\left[(n+1)\,f_{n+1}(\alpha,\beta) - (2n+1)\,f_n(\alpha,\beta) + n\,f_{n-1}(\alpha,\beta)\right]$$

résultat qui peut s'étendre de proche en proche à $t^K f(t)$ avec K = 2, 3, 4, ...; ainsi par exemple

$$t^2 f(t) \;\rightharpoonup\; \frac{1}{\beta^2}\left[(n+2)(n+1)\,f_{n+2}(\alpha,\beta) - 4(n+1)^2 f_{n+1}(\alpha,\beta) + (6n^2+6n+1)\,f_n(\alpha,\beta) - 4n^2 f_{n-1}(\alpha,\beta) + n(n-1)\,f_{n-2}(\alpha,\beta)\right]$$

3.5- Intégration

Nous ferons usage de la propriété bien connue pour la transformation de Laplace

$$g(t) = \int_0^t f(u)\,du \quad \supset \quad G(p) = \frac{1}{p}\,F(p)$$

et, par conséquent, d'après (III, 2)

$$g_n(\alpha,\beta) \;\dashv\; \frac{1}{\frac{\beta z}{z-1} - \alpha}\;\frac{\beta z}{z-1}\;F\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right)$$

ou encore

$$g_n(\alpha,\beta) \;\dashv\; \frac{z-1}{(\beta-\alpha)z+\alpha}\;Z\left\{f_n(\alpha,\beta)\right\}$$

cette dernière relation, interprétée à l'aide de la propriété de convolution réelle (I, 6) pour la transformation Z, compte tenu de la correspondance

$$\frac{z-1}{(\beta-\alpha)z+\alpha} \;\vdash\; \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & n = 0 \\ -\dfrac{\beta}{(\beta-\alpha)^2}\left(\dfrac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{n-1} & n \geqslant 1 \end{cases}$$

conduit à la relation souhaitée

$$\text{(III,8)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^t f(u)\,du \;\dashv\; g_n(\alpha,\beta) \\ g_0(\alpha,\beta) = \dfrac{1}{\beta-\alpha}\,f_0(\alpha,\beta) \\ g_n(\alpha,\beta) = \dfrac{1}{\beta-\alpha}\left[f_n(\alpha,\beta) - \dfrac{\beta}{\beta-\alpha}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{j-1} f_{n-j}(\alpha,\beta)\right] & n \geqslant 1 \end{cases}$$

si $\alpha = 0$ la relation se simplifie

$$g_n(0,\beta) = \frac{1}{\beta}\left[f_n(0,\beta) - f_{n-1}(0,\beta)\right]$$

enfin, l'interprétation de la relation

$$\left[(\beta-\alpha) + \alpha z^{-1}\right] Z\left\{g_n(\alpha,\beta)\right\} = \left(1 - z^{-1}\right) Z\left\{f_n(\alpha,\beta)\right\}$$

conduit à une relation de récurrence fort intéressante pour le calcul numérique des $g_n(\alpha, \beta)$ à savoir

$$\text{(III,8 bis)} \qquad g_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[f_n(\alpha,\beta) - f_{n-1}(\alpha,\beta) - \alpha\, g_{n-1}(\alpha,\beta)\right]$$

3.6- Dérivation

Si la dérivée $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ est continue pour $t > 0$ sa transformée de Laplace est donnée par la relation

$$g(t) = f'(t) \supset G(p) = pF(p) - f(+0)$$

d'où

$$g_n(\alpha,\beta) \multimap \frac{\beta z}{z-1}\left[\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right) F\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right) - f(+0)\right]$$

relation qui interprétée à l'aide de la propriété (I, 5) pour la transformation Z signifie

$$(III,9) \qquad f'(t) \multimap \beta\left[\sum_{j=0}^{n} f_j(\alpha,\beta)\right] - \alpha f_n(\alpha,\beta) - \beta f(+0)$$

à condition que f'(t) soit continue pour $t > 0$. Ce résultat peut s'étendre de proche en proche aux dérivées d'ordre supérieur.

L'interprétation de la relation

$$\frac{1}{\beta}(1-z^{-1})\, Z\{g_n(\alpha,\beta)\} = \left[1 - \frac{\alpha}{\beta}(1-z^{-1})\right] Z\{f_n(\alpha,\beta)\} - f(+0)$$

conduit à la relation de récurrence fort intéressante pour le calcul numérique des $g_n(\alpha, \beta)$

$$(III,9\text{ bis}) \quad g_n(\alpha,\beta) = (\beta-\alpha) f_n(\alpha,\beta) + \alpha f_{n-1}(\alpha,\beta) + g_{n-1}(\alpha,\beta) \qquad g_0(\alpha,\beta) = (\beta-\alpha) f_0(\alpha,\beta) - \beta f(+0)$$

Des relations (III, 7) et (III, 9) on déduit

$$(III,10) \quad t f'(t) \multimap -\frac{1}{\beta}\left\{(\beta-\alpha)(n+1) f_{n+1}(\alpha,\beta) + \left[(2n+1)\alpha - \beta n\right] f_n(\alpha,\beta) - \alpha n f_{n-1}(\alpha,\beta)\right\}$$

considérons maintenant

$$t f''(t) + f'(t) = \frac{d}{dt}\left[t f'(t)\right]$$

l'application de la relation (III, 9) compte tenu de (III, 10) conduit, après quelques calculs élémentaires, à la correspondance

$$(III,11) \qquad t f''(t) + f'(t) \multimap -(n+1)\left[(\beta-\alpha) f_{n+1}(\alpha,\beta) + \alpha f_n(\alpha,\beta)\right]$$

On en déduit la correspondance suivante

$$(III,12) \qquad t f''(t) + \left[1 - (\beta-2\alpha)t\right] f'(t) - \alpha(\beta-\alpha) t f(t) \multimap -(\beta n + \alpha) f_n(\alpha,\beta)$$

susceptible d'être appliquée à la résolution de certaines équations aux dérivées partielles, avec conditions aux limites.

3.7- Convolution

Soit g(t) le produit de convolution de deux fonctions e(t) et f(t) défini de la manière suivante

$$g(t) = e(t) \otimes f(t) = \int_0^t e(u) f(t-u) du = \int_0^t e(t-u) f(u) du$$

les transformées de Laplace vérifient la relation

$$G(p) = E(p) F(p)$$

et, d'après (III, 2)

$$g_n(\alpha,\beta) \dashv \frac{\beta z}{z-1} E\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right) F\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right)$$

relation qui peut s'écrire

$$g_n(\alpha,\beta) \dashv \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{1}{z}\right) Z\left\{e_n(\alpha,\beta)\right\} Z\left\{f_n(\alpha,\beta)\right\}$$

ou encore

$$g_n(\alpha,\beta) \dashv \frac{1}{\beta} Z\left\{e_n(\alpha,\beta) - e_{n-1}(\alpha,\beta)\right\} Z\left\{f_n(\alpha,\beta)\right\}$$

l'interprétation du produit des deux transformées Z conduit à la correspondance

(III, 13) $$e(t) \otimes f(t) \dashv \frac{1}{\beta} \sum_{j=0}^{n} \left[e_j(\alpha,\beta) - e_{j-1}(\alpha,\beta)\right] f_{n-j}(\alpha,\beta)$$

3.8- Fonction retardée

Désignons par u(t) la fonction unité de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

la transformée de Laplace de la fonction retardée g(t) = f(t - τ) u(t - τ) est

$$G(p) = e^{-\tau p} F(p) \qquad (\tau > 0)$$

et par conséquent, d'après (III, 2)

$$g_n(\alpha,\beta) \dashv \frac{\beta z}{z-1} e^{-\tau\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right)} F\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right)$$

ou encore

$$g_n(\alpha,\beta) \dashv e^{-(\beta-\alpha)\tau} Z\left\{L_n(\beta\tau) - L_{n-1}(\beta\tau)\right\} Z\left\{f_n(\alpha,\beta)\right\}$$

l'interprétation du produit des deux transformées Z conduit à la correspondance

$$(III,14) \qquad f(t-\tau)\,u(t-\tau) \rightharpoonup e^{-(\beta-\alpha)\tau} \sum_{j=0}^{n} \left[L_j(\beta\tau) - L_{j-1}(\beta\tau)\right] f_{n-j}(\alpha,\beta)$$

3.9- Fonction périodique

Considérons une fonction périodique f(t), de période T, et la fonction $f^T(t)$ définie de la manière suivante

$$f^T(t) = \begin{cases} f(t) & t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

la transformée de Laguerre de $f^T(t)$, que nous appellerons transformée de Laguerre partielle, est alors

$$f_n^T(\alpha,\beta) = \beta \int_0^T e^{-(\beta-\alpha)t} L_n(\beta t)\, f(t)\, dt$$

et, si $F^T(p)$ désigne la transformée de Laplace de $f^T(t)$ la relation (III, 2) devient

$$f_n^T(\alpha,\beta) \rightharpoonup \frac{\beta z}{z-1} F^T\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right)$$

mais les transformées de Laplace de f(t) et $f^T(t)$ vérifient la relation

$$F^T(p) = \left(1 - e^{-Tp}\right) F(p)$$

et par conséquent

$$f_n^T(\alpha,\beta) \rightharpoonup \left[1 - e^{-(\beta-\alpha)T} e^{-\frac{\beta T}{z-1}}\right] \mathcal{Z}\left\{f_n(\alpha,\beta)\right\}$$

l'interprétation du produit des deux transformées Z conduit à la relation de récurrence

$$(III,15) \qquad f_n(\alpha,\beta) = \frac{f_n^T(\alpha,\beta) + e^{-(\beta-\alpha)T} \sum_{j=1}^{n} \left[L_j(\beta T) - L_{j-1}(\beta T)\right] f_{n-j}(\alpha,\beta)}{1 - e^{-(\beta-\alpha)T}}$$

Cette relation de récurrence permet de calculer de proche en proche la transformée de Laguerre d'une fonction périodique lorsque la transformée de Laguerre partielle est connue.

Réciproquement, la relation (III, 15) peut aussi s'écrire

$$(III,15\text{ bis}) \qquad f_n^T(\alpha,\beta) = f_n(\alpha,\beta) - e^{-(\beta-\alpha)T} \sum_{j=0}^{n} \left[L_j(\beta T) - L_{j-1}(\beta T)\right] f_{n-j}(\alpha,\beta)$$

Cette dernière relation peut être utile pour calculer la transformée de Laguerre de $f^T(t)$ lorsque la transformée de Laguerre de la fonction périodique f(t) est connue. Par exemple, il est ainsi possible de calculer la transformée de Laguerre de la fonction

$$f^T(t) = \begin{cases} \sin t & t < 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{cases}$$

à partir de la transformée de Laguerre de la fonction périodique f(t) = sin t.

3.10- Division par (t + a)

3.10.1- Cas Général

Considérons la fonction g(t) suivante

$$g(t) = \frac{f(t)}{t+a}$$

a désignant une constante. Nous supposerons la fonction g(t) définie pour tout $t \geqslant 0$.

Les fonctions f(t) et g(t) vérifient la relation

$$f(t) = t\,g(t) + a\,g(t)$$

en prenant la transformée de Laguerre de chaque membre compte tenu de (III, 7) il vient

$$f_n(\alpha,\beta) = -\frac{1}{\beta}\left[(n+1)g_{n+1}(\alpha,\beta) - (2n+1)g_n(\alpha,\beta) + n\,g_{n-1}(\alpha,\beta)\right] + a\,g_n(\alpha,\beta)$$

relation de récurrence que l'on écrira sous la forme

(III, 16) $$g_{n+1}(\alpha,\beta) = \frac{(2n+a\beta+1)\,g_n(\alpha,\beta) - n\,g_{n-1}(\alpha,\beta) - \beta f_n(\alpha,\beta)}{n+1}$$

Cette relation de récurrence permettra le calcul des $g_n(\alpha, \beta)$ de proche en proche si les $f_n(\alpha, \beta)$ et $g_o(\alpha, \beta)$ sont connus. Il est intéressant de noter la relation

$$g_0(\alpha,\beta) = \beta\, G(\beta-\alpha)$$

où G(p) désigne la transformée de Laplace de g(t).

Remarque :

Le résultat précédent peut s'étendre à

$$g(t) = \frac{Q_1(t)\,f(t)}{Q_2(t)}$$

où $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ désignent des polynômes en t tels que g(t) reste définie $\forall t \geqslant 0$. En effet, dans ce cas

$$Q_2(t)\, g(t) = Q_1(t)\, f(t)$$

il suffit de prendre la transformée de Laguerre de chaque membre, compte tenu de la relation donnant la transformée de Laguerre de $t^K f(t)$ [on la déduit de (III, 7)] pour obtenir une relation de récurrence permettant le calcul des $g_n(\alpha, \beta)$ de proche en proche, connaissant les $f_n(\alpha, \beta)$ et $g_0(\alpha, \beta)$, $g_1(\alpha, \beta)$,... $g_{m-1}(\alpha, \beta)$ si $Q_2(t)$ est de degré m en t.

Par exemple, si la transformée de Laguerre de

$$g(t) = \frac{f(t)}{t^2}$$

existe, on pourra la calculer à l'aide de la relation de récurrence

(III, 17)
$$g_{n+2}(\alpha,\beta) = \frac{\beta^2 f_n(\alpha,\beta) + 4(n+1)^2 g_{n+1}(\alpha,\beta) - (6n^2+6n+1) g_n(\alpha,\beta) + 4n^2 g_{n-1}(\alpha,\beta) - n(n-1) g_{n-2}(\alpha,\beta)}{(n+1)(n+2)}$$

avec
$$\begin{cases} g_0(\alpha,\beta) = \beta\, G(\beta-\alpha) \\ g_1(\alpha,\beta) = \beta\left[G(\beta-\alpha) + \beta\, G'(\beta-\alpha) \right] \end{cases} \qquad G'(p) = \frac{dG(p)}{dp}$$

3.10.2- Cas particulier a = 0

La fonction g(t) s'écrit dans ce cas

$$g(t) = \frac{f(t)}{t}$$

La relation de récurrence (III, 16) reste évidemment valable dans ce cas particulier a = 0 ; cependant, nous allons établir une nouvelle relation.

Les transformées de Laplace de g(t) et f(t) vérifient la relation

$$G(p) = \int_p^\infty F(\sigma)\, d\sigma$$

on en déduit

$$g_0(\alpha,\beta) = \beta \int_{\beta-\alpha}^\infty F(\sigma)\, d\sigma$$

et d'après (III, 2)

$$g_n(\alpha,\beta) \dashv \frac{\beta z}{z-1}\left[P(\infty) - P\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right)\right]$$

où P(p) désigne une primitive de F(p).

Posons

(III, 18) $$\varphi_n = \frac{1}{\beta}\left[g_n(\alpha,\beta) - g_{n-1}(\alpha,\beta)\right]$$

d'après (I, 3)

$$\varphi_n \dashv P(\infty) - P\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right)$$

et d'après (I, 7)

$$n\varphi_n \dashv z\,\frac{dP\left(\frac{\beta z}{z-1}-\alpha\right)}{dz} = -\frac{\beta z}{(z-1)^2}\,\frac{dP\left(\frac{\beta z}{z-1}-\alpha\right)}{d\left(\frac{\beta z}{z-1}-\alpha\right)}$$

mais, P(p) étant une primitive de F(p)

$$\frac{dP\left(\frac{\beta z}{z-1}-\alpha\right)}{d\left(\frac{\beta z}{z-1}-\alpha\right)} = F\left(\frac{\beta z}{z-1}-\alpha\right)$$

et par conséquent

$$n\varphi_n \dashv -z^{-1}\,\frac{z}{z-1}\,Z\left\{f_n(\alpha,\beta)\right\}$$

relation qui, interprétée suivant les propriétés de la transformation Z signifie

$$n\varphi_n = -\sum_{j=0}^{n-1} f_j(\alpha,\beta) \qquad n \geqslant 1$$

ou encore

$$\varphi_n = -\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j(\alpha,\beta) \qquad n \geqslant 1$$

de (III, 18) on tire

$$g_n(\alpha,\beta) = \beta \sum_{j=0}^{n} \varphi_j$$

d'où finalement

(III, 19) $$g_n(\alpha,\beta) = g_0(\alpha,\beta) - \beta \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} f_k(\alpha,\beta) \qquad n \geqslant 1$$

relation qui peut encore s'écrire

(III, 19 bis) $$g_n(\alpha,\beta) = g_0(\alpha,\beta) - \beta \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j}\right) f_k(\alpha,\beta) \qquad n \geqslant 1$$

introduisons, dans (III, 19), la transformée de Laguerre de la dérivée f'(t)

$$f'(t) \dashv\!\vdash \dot{f}_n(\alpha,\beta) = \beta\Big[\sum_{j=0}^{n} f_j(\alpha,\beta)\Big] - \alpha f_n(\alpha,\beta) - \beta f(+0)$$

nous obtenons la relation

(III, 19 ter) $$g_n(\alpha,\beta) = g_0(\alpha,\beta) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\dot{f}_{j-1}(\alpha,\beta) + \alpha f_{j-1}(\alpha,\beta) + \beta f(+0)}{j}$$

exemple

Considérons la fonction

$$g(t) = \frac{\sin t}{t}$$

sa transformée de Laplace est

$$G(p) = \operatorname{Arctg} \frac{1}{p}$$

d'où

$$g_0(\alpha,\beta) = \beta \operatorname{Arctg} \frac{1}{\beta-\alpha}$$

connaissant la transformée de Laguerre de f(t) = sin t, on calcule alors aisément la transformée de Laguerre de $\frac{\sin t}{t}$ à l'aide de (III, 19) ou (III, 19 bis). Cette transformée de Laguerre peut aussi se calculer à l'aide de (III, 19 ter) connaissant les transformées de Laguerre de f(t) = sin t et f'(t) = cos t. Toutefois l'usage de la relation (III, 16) reste préférable pour le calcul numérique des $g_n(\alpha, \beta)$.

3.11- Division par (t + a) puis intégration

3.11.1- Cas général

Considérons la fonction g(t) suivante

$$g(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{u+a}\, du$$

a désignant une constante.

La dérivée g'(t) vérifie la relation

$$g'(t) = \frac{f(t)}{t+a}$$

ou encore

$$f(t) = t\,g'(t) + a\,g'(t)$$

en prenant la transformée de Laguerre de chaque membre compte tenu de (III, 9) et (III, 10), on établit la relation de récurrence suivante

(III, 20) $$g_{n+1}(\alpha,\beta) = \frac{\big[\beta n - (2n+1)\alpha - a\alpha\beta\big] g_n(\alpha,\beta) + \alpha n\, g_{n-1}(\alpha,\beta) - \beta f_n(\alpha,\beta) + a\beta^2 \sum_{j=0}^{n} g_j(\alpha,\beta)}{(\beta-\alpha)(n+1)}$$

qui permet le calcul des $g_n(\alpha, \beta)$ de proche en proche si les $f_n(\alpha, \beta)$ et $g_o(\alpha, \beta)$ sont connus.

3.11.2- Cas particulier a = 0

La fonction g(t) s'écrit dans ce cas

$$g(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{u}\, du$$

la relation de récurrence (III, 20) reste évidemment valable (avec a = 0) et préférable pour le calcul numérique mais, comme au paragraphe 3.10.2 nous allons exprimer directement $g_n(\alpha, \beta)$. Les transformées de Laplace de f(t) et g(t) vérifient la relation

$$G(p) = \frac{1}{p} \int_p^\infty F(\sigma)\, d\sigma$$

on en déduit

$$g_o(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\beta-\alpha} \int_{\beta-\alpha}^\infty F(\sigma)\, d\sigma$$

Un raisonnement analogue à celui exposé au paragraphe 3.10.2 conduit à la relation

(III,21) $$g_n(\alpha,\beta) = \left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n g_o(\alpha,\beta) - \frac{\beta}{\beta-\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{n-j} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} f_{ik}(\alpha,\beta)$$

ou encore

(III,21 bis) $$g_n(\alpha,\beta) = \left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n g_o(\alpha,\beta) - \frac{\beta}{\beta-\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{j=k+1}^{n} \left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{n-j} \frac{1}{j} \right] f_k(\alpha,\beta)$$

introduisons dans (III, 21) la transformée de Laguerre $\dot{f}_n(\alpha, \beta)$ de la dérivée f'(t), il vient

(III,21 ter) $$g_n(\alpha,\beta) = \left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n g_o(\alpha,\beta) - \frac{\beta}{\beta-\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{n-j} \frac{\dot{f}_{j-1}(\alpha,\beta) + \alpha f_{j-1}(\alpha,\beta) + \beta f(+0)}{\beta j}$$

Ces relations se simplifient considérablement si $\alpha = 0$; ainsi (III, 21 ter) devient

$$g_n(0,\beta) = -\frac{\dot{f}_{n-1}(0,\beta) + \beta f(+0)}{\beta n} \qquad n \geqslant 1$$

exemple

Soit à calculer la transformée de Laguerre $g_n(0,1)$ du sinus intégral $S_i(t)$ ainsi défini :

$$g(t) = S_i(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\, du$$

pour calculer $g_o(0,1)$ il est avantageux de faire usage de la relation

$$g_o(0,1) = G(1)$$

or, on trouve dans les tables de transformées de Laplace

$$G(p) = \frac{1}{p} \operatorname{Arctg} \frac{1}{p}$$

d'où

$$g_o(0,1) = \frac{\pi}{4}$$

la transformée de Laguerre de f'(t) = cos t est

$$\dot{f}_n(0,1) = 2^{-\frac{n+1}{2}} \sin \frac{(n+1)\pi}{4}$$

et par conséquent

$$g_n(0,1) = -\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n\, 2^{\frac{n}{2}}} \qquad n \geq 1$$

3.11.3- Transformée de Laguerre de $g(t) = \int_t^\infty \frac{f(u)}{u+a}\, du$

La dérivée g'(t) vérifie la relation

$$-f(t) = t\, g'(t) + a\, g'(t)$$

en comparant avec la relation homologue du paragraphe 3.11.1 on voit que la transformée de Laguerre $g_n(\alpha, \beta)$ vérifie la relation de récurrence

$$(III,22) \quad g_{n+1}(\alpha,\beta) = \frac{\left[\beta n - (2n+1)\alpha - a\alpha\beta\right] g_n(\alpha,\beta) + \alpha n\, g_{n-1}(\alpha,\beta) + \beta f_n(\alpha,\beta) + a\beta^2 \sum_{j=0}^{n} g_j(\alpha,\beta)}{(\beta-\alpha)(n+1)}$$

déduite de (III, 20) en changeant f(t) en - f(t) c'est-à-dire $f_n(\alpha, \beta)$ en $-f_n(\alpha, \beta)$.

De même, dans le cas particulier a = o, on déduit de la relation (III,21)

$$(III,23)\quad g_n(\alpha,\beta)=\left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n g_o(\alpha,\beta)+\frac{\beta}{\beta-\alpha}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{n-j}\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1} f_k(\alpha,\beta)$$

avec cette fois

$$g_o(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\beta-\alpha}\int_0^{\beta-\alpha} F(\sigma)\,d\sigma$$

ou encore

$$(III,23\text{ bis})\quad g_n(\alpha,\beta)=\left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n g_o(\alpha,\beta)+\frac{\beta}{\beta-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{n-j}\frac{1}{j}\right] f_k(\alpha,\beta)$$

introduisons dans (III, 21) la transformée de Laguerre $\dot{f}_n(\alpha, \beta)$ de la dérivée f'(t), il vient

$$(III,23\text{ ter})\quad g_n(\alpha,\beta)=\left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n g_o(\alpha,\beta)+\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{n-j}\frac{\dot{f}_{j-1}(\alpha,\beta)+\alpha f_{j-1}(\alpha,\beta)+\beta f(+0)}{j}$$

relation qui s'écrit pour $\alpha = 0$

$$g_n(0,\beta)=\frac{\dot{f}_{n-1}(0,\beta)+\beta f(+0)}{\beta n}\qquad n\geq 1$$

exemple

Soit à calculer la transformée de Laguerre $g_n(0,1)$ du cosinus intégral Ci(t) ainsi défini

$$g(t)=C_i(t)=-\int_t^{\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$$

dans ce cas f(t) = - cos t et par conséquent

$$F(p)=-\frac{p}{p^2+1}$$

d'où

$$g_o(0,1)=-\int_0^1\frac{\sigma\,d\sigma}{\sigma^2+1}=-\frac{1}{2}\log 2$$

La transformée de Laguerre de f'(t) = sin t est

$$\dot{f}(0,1)=2^{-\frac{n+1}{2}}\cos(n+1)\frac{\pi}{4}$$

d'où

$$g_n(0,1)=\frac{1}{n}\left(2^{-\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}-1\right)\qquad n\geq 1$$

3.12- Relation entre $f_n(\alpha + a, \beta + a)$ et $f_n(\alpha,\beta)$

Par définition, a désignant une constante réelle

$$f_n(\alpha+a,\beta+a)=(\beta+a)\int_0^{\infty}e^{-(\beta-\alpha)t}L_n[(\beta+a)t]f(t)\,dt$$

il suffit de faire usage de la formule d'addition (54)

$$L_n[(\beta+a)t] = \left(\frac{a}{\beta}\right)^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \left(1+\frac{\beta}{a}\right)^j L_j(\beta t)$$

pour obtenir la relation

(III,24) $$f_n(\alpha+a, \beta+a) = \left(1+\frac{a}{\beta}\right)\left(\frac{a}{\beta}\right)^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \left(1+\frac{\beta}{a}\right)^j f_j(\alpha,\beta)$$

cette relation peut encore s'écrire

(III, 24 bis) $$f_n(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\beta+\alpha_o-\alpha} \left(\frac{\alpha_o-\alpha}{\beta+\alpha_o-\alpha}\right)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{\beta}{\alpha_o-\alpha}\right)^j f_j(\alpha_o, \beta+\alpha_o-\alpha)$$

il est ainsi possible de calculer $f_n(\alpha,\beta)$ connaissant la transformée de Laguerre $f_n(\alpha_o,\beta')$ correspondant à une valeur particulière α_o de α. Une telle application sera faite au paragraphe suivant.

3.13- Transformée de Laguerre de g(t) = $t^{\frac{\nu}{2}} \int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{ut})\, u^{-\frac{\nu}{2}} f(u)\, du$

Des fonctions g(t) ainsi définies peuvent se rencontrer en théorie des circuits. Les transformées de Laplace de f(t) et g(t) vérifient la relation

$$G(p) = \frac{1}{p^{\nu+1}} F\left(\frac{1}{p}\right) \qquad \nu > -1$$

3.13.1- Cas particulier $\nu = 0$

Nous supposerons $\alpha \neq 0$, $\beta \neq \alpha$

D'après (III, 2)

$$g_n(\alpha,\beta) \dashv \frac{\beta z}{(\beta-\alpha)z+\alpha} F\left[\frac{z-1}{(\beta-\alpha)z+\alpha}\right]$$

et

$$f_n\left[\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha(\beta-\alpha)}\right] \dashv \frac{\beta}{\alpha(\beta-\alpha)} \frac{z}{z-1} F\left[\frac{\beta}{\alpha(\beta-\alpha)} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{\alpha}\right]$$

Compte tenu de la propriété (I, 2) pour la transformation Z

$$\alpha\left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n f_n\left[\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha(\beta-\alpha)}\right] \dashv \frac{\beta z}{(\beta-\alpha)z+\alpha} F\left[\frac{z-1}{(\beta-\alpha)z+\alpha}\right] = Z\{g_n(\alpha,\beta)\}$$

et par conséquent

(III,25) $$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut}) f(u)\, du \dashv g_n(\alpha,\beta) = \alpha\left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n f_n\left[\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha(\beta-\alpha)}\right]$$

3.13.2- Cas particulier $\alpha = 0$

D'après (III, 2)

$$g_n(0,\beta) \dashv \left(\frac{\beta z}{z-1}\right)^{-\nu} F\left[\frac{z-1}{\beta z}\right]$$

et

$$(-1)^n \binom{\nu}{n} f_n\left(0,\frac{1}{\beta}\right) \dashv \frac{1}{\beta}\,\frac{z}{z+1}\, F\left[\frac{1}{\beta}\,\frac{z}{z+1}\right]$$

d'après la correspondance (I, 70 b) pour la transformation Z

$$\beta^{1-\nu} \sum_{j=0}^{n} \binom{n-\nu}{n-j}(-1)^j f_j\left(0,\frac{1}{\beta}\right) \dashv \left(\frac{\beta z}{z-1}\right)^{-\nu} F\left[\frac{z-1}{\beta z}\right] = Z\left\{g_n(0,\beta)\right\}$$

et par conséquent

(III,26 a) $$g_n(0,\beta) = \beta^{1-\nu} \sum_{j=0}^{n} \binom{n-\nu}{n-j}(-1)^j f_j\left(0,\frac{1}{\beta}\right)$$

3.13.3- Cas général

Il suffit d'appliquer la relation (III, 24 bis) avec $\alpha_o = 0$, compte tenu de (III, 26 a) pour obtenir

$$g_n(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{(\beta-\alpha)^\nu}\left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^j \sum_{k=0}^{j} \binom{j-\nu}{j-k}(-1)^k f_k\left(0,\frac{1}{\beta-\alpha}\right)$$

ou encore

(III,26) $$g_n(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{(\beta-\alpha)^\nu}\left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=k}^{n}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^j \binom{n}{j}\binom{j-\nu}{j-k}\right](-1)^k f_k\left(0,\frac{1}{\beta-\alpha}\right)$$

4 - INVERSION DE LA TRANSFORMATION DE LAGUERRE

4.1- Théorème d'inversion

h_1) Si f(t) est de l'ordre de e^{bt} lorsque $t\to\infty$ c'est-à-dire s'il existe un nombre positif M et un instant T tels que

$$t > T \implies |f(t)| < M e^{bt}$$

avec

$$\frac{\beta}{2} - \alpha > b$$

h_2) Si l'intégrale

$$\int_0^{t_o} t^{-\frac{1}{4}} |f(t)|\, dt$$

existe pour un certain t_o positif

h_3) et si f(t) est à variations bornées dans un certain intervalle $(t - \delta, t + \delta)$ et absolument intégrable sur chaque intervalle fini

alors l'inversion de $f_n(\alpha, \beta)$ est résolue par la relation suivante

(III,27)
$$f(t) = e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha, \beta)\, L_n(\beta t) \qquad t > 0$$

à condition de poser en chaque point où f(t) est discontinue

$$f(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

Démonstration

Ecrivons f(t) sous la forme d'un développement en série de fonctions

$$\lambda_n(t) = e^{-\alpha t} L_n(\beta t)$$

soit

$$f(t) = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k(\beta t)$$

le problème de la convergence sera examiné par la suite. Il résulte de la relation de définition de la transformation de Laguerre

$$f_n(\alpha, \beta) = \beta \int_0^{\infty} e^{-\beta t} L_n(\beta t) \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k(\beta t) \right] dt$$

en faisant usage de la propriété d'orthogonalité des fonctions de Laguerre

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta t} L_n(\beta t)\, L_k(\beta t)\, d(\beta t) = \delta_{n,k}$$

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

on obtient

$$c_n = f_n(\alpha, \beta)$$

ce qui établit la relation (III, 27).

Considérons la fonction

$$\varphi(t) = e^{\frac{\alpha}{\beta} t} f\left(\frac{t}{\beta}\right)$$

il résulte d'une étude de de USPENSKY ([55]) que si les hypothèses h_1, h_2 et h_3 sont satisfaites alors la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(0,1) L_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha,\beta) L_n(t)$$

converge pour $t > 0$ vers

$$\frac{\varphi(t+0) + \varphi(t-0)}{2}$$

soit vers $\varphi(t)$ en tout point où $\varphi(t)$ est continue. Par conséquent la série

$$e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha,\beta) L_n(\beta t)$$

converge pour $t > 0$ vers

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

soit vers $f(t)$ en tout point où $f(t)$ est continue.

Remarque

Il convient de noter que l'existence de la transformée de Laguerre n'implique nullement la convergence de la série d'inversion.

Considérons par exemple la fonction

$$f(t) = e^{\frac{3}{4} t}$$

sa transformée de Laguerre existe pour

$$\beta - \alpha > \frac{3}{4}$$

c'est-à-dire par exemple pour $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. Dans ce cas

$$f_n(1,2) = 8(-7)^n$$

par contre la série d'inversion ne converge pas pour $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ (l'hypothèse h_1 n'est pas vérifiée).

La série d'inversion convergera si

$$\frac{\beta}{2} - \alpha > \frac{3}{4}$$

les hypothèses h_1, h_2 et h_3 étant alors vérifiées.

Ces hypothèses seront supposées satisfaites pour les fonctions f(t) envisagées ci-dessous.

4.2- Etude de l'erreur lorsque la série d'inversion est limitée aux N premiers termes

4.2.1- Introduction

En règle générale, lorsque l'on envisage le calcul numérique de f(t) à partir des valeurs numériques de $f_n(\alpha, \beta)$ on doit, pour des raisons pratiques évidentes, limiter la série d'inversion (III, 27) à un nombre fini N de termes. Nous désignerons par $\tilde{f}(t)$ l'approximation ainsi définie pour f(t), à savoir

(III,28) $$\tilde{f}(t) = e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{N-1} f_n(\alpha,\beta) L_n(\beta t)$$

on montre en s'appuyant sur les propriétés d'orthogonalité des fonctions de Laguerre que $\tilde{f}(t)$ ainsi définie est la combinaison linéaire des N premières fonctions

$$\lambda_n(t) = e^{-\alpha t} L_n(\beta t)$$

qui minimalise l'intégrale

$$I = \int_0^\infty e^{-(\beta-2\alpha)t} \left[f(t) - \tilde{f}(t) \right]^2 dt$$

Il est intéressant de noter que les coefficients $f_n(\alpha, \beta)$ qui interviennent dans la relation (III, 28) ne dépendent pas de N. Par conséquent, si l'on désire améliorer l'approximation en conservant un plus grand nombre N' de termes il suffit de calculer $f_N(\alpha, \beta)$, $f_{N+1}(\alpha,\beta), \ldots, f_{N'-1}(\alpha,\beta)$ soit (N' - N) nouveaux coefficients puisque les N premiers coefficients restent ceux déjà calculés.

4.2.2- Estimation de l'erreur $E(t) = |f(t) - \tilde{f}(t)|$

La proposition suivante, malgré sa grande simplicité et son intérêt pratique certain, est à notre connaissance inédite même lorsque l'on particularise les paramètres α et β.

Proposition

- Soit $f_{N_o}(\alpha,\beta)$ le dernier terme non nul du spectre de Laguerre $\{f_o(\alpha,\beta), f_1(\alpha,\beta), \ldots f_{N-1}(\alpha,\beta)\}$ de $\tilde{f}(t)$
- Soient $f_{N_1}(\alpha,\beta)$, $f_{N_2}(\alpha,\beta)$, $f_{N_3}(\alpha,\beta)$ ... $(N_1 < N_2 < N_3 \ldots.)$ les termes non nuls du spectre $\{f_N(\alpha,\beta), f_{N+1}(\alpha,\beta), f_{N+2}(\alpha,\beta) \ldots\}$ de $[f(t) - \tilde{f}(t)]$

Alors, si $\forall k \geq 0$

$$\frac{|f_{N_{k+1}}(\alpha,\beta)|}{|f_{N_k}(\alpha,\beta)|} \leq \frac{1}{q} \quad , \quad q > 1$$

une borne supérieure de l'erreur E(t) est donnée par

(III,29) $$E(t) \leq \frac{|f_{N_0}(\alpha,\beta)|}{q-1} e^{(\frac{\beta}{2}-\alpha)t}$$

en d'autres termes, l'erreur E(t) sera inférieure à $\Delta f (\Delta f > 0)$ si l'inégalité suivante est vérifiée

(III,29 bis) $$(\beta - 2\alpha)t < 2 \operatorname{Log} \frac{(q-1)\Delta f}{|f_{N_0}(\alpha,\beta)|}$$

Démonstration

On a manifestement

$$E(t) = \left| e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{\infty} f_{N_k}(\alpha,\beta) L_{N_k}(\beta t) \right| \leq e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{N_k}(\alpha,\beta) \right| \left| L_{N_k}(\beta t) \right| \leq e^{(\frac{\beta}{2}-\alpha)t} \sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{N_k}(\alpha,\beta) \right|$$

puisque les polynômes de Laguerre vérifient l'inégalité

$$|L_n(\beta t)| \leq e^{\frac{\beta}{2} t} \quad , \quad \beta t \geq 0$$

mais par hypothèse

$$|f_{N_k}(\alpha,\beta)| \leq \left(\frac{1}{q}\right)^k |f_{N_0}(\alpha,\beta)|$$

d'où

$$E(t) \leq |f_{N_0}(\alpha,\beta)| e^{(\frac{\beta}{2}-\alpha)t} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^k$$

comme $q > 1$ par hypothèse la série géométrique est convergente et a pour somme $\frac{1}{q-1}$ ce qui établit (III, 29).

L'erreur E(t) sera inférieure à Δf si

$$e^{(\frac{\beta}{2}-\alpha)t} < \frac{(q-1)\Delta f}{|f_{N_0}(\alpha,\beta)|}$$

relation équivalente à (III, 29 bis).

Notons que dans le cas particulier $\beta = 2\alpha$

$$E(t) \leq \frac{|f_{N_0}(\alpha,\beta)|}{q-1} \qquad \forall t \geq 0$$

Exemple

$$f(t) = e^{-t} \qquad \alpha = \frac{1}{2} \qquad \beta = 1$$

on a

$$f_n\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{2}{3^{n+1}} \qquad q = 3$$

(III, 29 bis) sera vérifiée $\forall t \geqslant 0$ si

$$\left| f_{N-1}\left(\frac{1}{2}, 1\right) \right| < 2\,\Delta f$$

c'est-à-dire si

$$\frac{1}{3^N} < \Delta f$$

on en déduit que pour représenter ainsi la fonction $f(t) = e^{-t}$ avec $E(t) < \Delta f = 10^{-}$ il suffit de conserver les N = 7 premiers termes dans la relation (III, 27) ; si l'on désire $E(t) < 10^{-6}$ il suffit de conserver N = 13 termes.

4.2.3- Erreur quadratique

4.2.3.1- Définition

Afin de rendre compte objectivement de la qualité de l'approximation réalisée par la relation (III, 28) nous introduirons '' l'erreur quadratique '' ε_N définie de la manière suivante

(III,30)
$$\varepsilon_N^2 = \frac{\int_0^\infty e^{-(\beta-2\alpha)t}\left[f(t) - \tilde{f}(t)\right]^2 dt}{\int_0^\infty e^{-(\beta-2\alpha)t}\left[f(t)\right]^2 dt}$$

définition équivalente, compte tenu des propriétés d'orthogonalité des fonctions de Laguerre, à

(III,30 bis)
$$\varepsilon_N^2 = \frac{\sum_{n=N}^{\infty} f_n^2(\alpha,\beta)}{\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(\alpha,\beta)} = 1 - \frac{\sum_{n=0}^{N-1} f_n^2(\alpha,\beta)}{\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(\alpha,\beta)}$$

ou encore

$$\varepsilon_N^2 = 1 - \frac{\sum_{n=0}^{N-1} f_n^2(\alpha,\beta)}{\int_0^\infty e^{-(\beta-2\alpha)t}\left[f(t)\right]^2 dt}$$

par conséquent ε_N^2 vérifie dans tous les cas la double inégalité

$$0 \leqslant \varepsilon_N^2 \leqslant 1$$

4.2.3.2- Minimalisation de l'erreur ε_N

Un problème d'intérêt pratique considérable se pose : comment choisir α et β pour rendre l'erreur ε_N minimale ?

Quelques auteurs se sont penchés sur ce problème dans le cas particulier $\beta = 2\alpha$. Ce sont à notre connaissance DEAL ([56]), CLOWES ([57]), KING et O'CANAINN([58]) SCHETZEN ([59]) puis enfin PARKS ([60]). Les résultats obtenus par les quatre premiers auteurs sont très difficilement exploitables en pratique car d'une part ils exigent la connaissance de $f_n(\alpha, 2\alpha)$ sous forme analytique et d'autre part ils conduisent à des calculs très longs et très pénibles. La méthode développée par Schetzen semble également difficile à mettre en oeuvre sauf dans quelques cas très particuliers. Par contre, l'étude de Parks semble intéressante, aussi nous nous proposons de généraliser les résultats obtenus par Parks dans le cas particulier $\beta = 2\alpha$.

Pour mener à bien notre étude, nous devrons remplacer les hypothèses h_1, h_2 et h_3 du théorème d'inversion par des hypothèses plus sévères à savoir :

h'$_1$) les trois intégrales suivantes existent

$$\text{(III,31)} \qquad \begin{cases} M = \int_0^\infty e^{-(\beta-2\alpha)t} f^2(t)\, dt & f^2(t) = [f(t)]^2 \\ M_1 = \int_0^\infty e^{-(\beta-2\alpha)t}\, t f^2(t)\, dt & \\ M_2 = \int_0^\infty e^{-(\beta-2\alpha)t}\, t \dot{f}^2(t)\, dt & \dot{f}(t) = f'(t) = \frac{df(t)}{dt} \end{cases}$$

h'$_2$) les fonctions f(t), f'(t) et f''(t) sont continues pour $t \geqslant 0$.

Lemme 1

Considérons M_2 écrite sous la forme suivante

$$M_2 = \int_0^\infty e^{-(\beta-2\alpha)t}\, t\, f'(t)\, d[f(t)]$$

une intégration par parties, compte tenu des hypothèses, conduit à

$$M_2 = -\int_0^\infty e^{-(\beta-2\alpha)t} \left\{ t f''(t) + [1-(\beta-2\alpha)t] f'(t) \right\} f(t)\, dt$$

et par conséquent

$$M_2 + \alpha(\beta-\alpha) M_1 = -\int_0^\infty e^{-(\beta-2\alpha)t} \left\{ t f''(t) + [1-(\beta-2\alpha)t] f'(t) - \alpha(\beta-\alpha) t f(t) \right\} f(t)\, dt$$

mais, d'après (III, 27) et (III, 12)

$$f(t) = e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha,\beta)\, L_n(\beta t)$$

$$t f''(t) + [1-(\beta-2\alpha)t] f'(t) - \alpha(\beta-\alpha) t f(t) = -e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} (\beta n+\alpha) f_n(\alpha,\beta)\, L_n(\beta t)$$

il suffit de reporter dans l'expression ci-dessus, compte tenu de l'orthogonalité des fonctions de Laguerre, pour établir

(III,32) $$M_2 + \alpha(\beta-\alpha) M_1 = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (\beta n+\alpha) f_n^2(\alpha,\beta)$$

Lemme 2

De même, en raison des propriétés d'orthogonalité des fonctions de Laguerre

(III,33) $$M = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(\alpha,\beta)$$

Erreur maximale

De l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\beta n+\alpha) f_n^2(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{N-1} (\beta n+\alpha) f_n^2(\alpha,\beta) + \sum_{n=N}^{\infty} (\beta n+\alpha) f_n^2(\alpha,\beta) \geqslant \alpha \sum_{n=0}^{N-1} f_n^2(\alpha,\beta) + \sum_{n=N}^{\infty} (\beta N+\alpha) f_n^2(\alpha,\beta)$$

on tire

$$(\beta N+\alpha) \sum_{n=N}^{\infty} f_n^2(\alpha,\beta) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (\beta n+\alpha) f_n^2(\alpha,\beta) - \alpha \sum_{n=0}^{N-1} f_n^2(\alpha,\beta)$$

inégalité qui peut encore s'écrire

$$\beta N \sum_{n=N}^{\infty} f_n^2(\alpha,\beta) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (\beta n+\alpha) f_n^2(\alpha,\beta) - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(\alpha,\beta)$$

par conséquent, compte tenu de (III, 32) et (III, 33)

$$\sum_{n=N}^{\infty} f_n^2(\alpha,\beta) \leqslant \frac{M_2 + \alpha(\beta-\alpha) M_1 - \alpha M}{N}$$

ainsi, d'après (III, 30 bis)

$$\varepsilon_N^2 \leqslant \frac{M_2 + \alpha(\beta-\alpha) M_1 - \alpha M}{\beta N M}$$

introduisons les grandeurs réduites m_1 et m_2 suivantes

(III,34)
$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{M_1}{M} \\ m_2 = \dfrac{M_2}{M} \end{cases}$$

il vient finalement

(III,35)
$$\begin{cases} \varepsilon_N^2 \leqslant \dfrac{m_2 + \alpha(\beta-\alpha)m_1 - \alpha}{\beta N} & \beta N + \alpha \geqslant m_2 + \alpha(\beta-\alpha)m_1 \\ \varepsilon_N^2 \leqslant 1 & \beta N + \alpha \leqslant m_2 + \alpha(\beta-\alpha)m_1 \end{cases}$$

nous avons distingué deux cas, suivant la valeur de $(\beta N + \alpha)$ puisque ε_N^2 est au plus égale à l'unité.

On voit sur (III, 35) que la quantité ε_N^2 pourra être rendue aussi faible qu'on le désire en prenant N suffisamment grand.

Remarque

La borne supérieure de l'erreur donnée par (III, 35) peut être atteinte. On vérifie par exemple que la fonction

$$f(t) = e^{-\alpha t}\left[c_0 + c_N L_N(\beta t)\right]$$

satisfait l'égalité

$$\varepsilon_N^2 = \frac{m_2 + \alpha(\beta-\alpha)m_1 - \alpha}{\beta N}$$

Minimalisation de l'erreur maximale

En réalité, lorsque l'on se pose le problème de la détermination des valeurs optimales de α et β rendant minimale ε_N^2, il est tout naturel de préciser le poids affecté à la quantité $\left[f(t) - \tilde{f}(t)\right]^2$; ce poids fait donc partie intégrante de la définition de l'erreur et ne doit par conséquent pas dépendre de la manière dont on définit $\tilde{f}(t)$. En d'autres termes, ceci revient à se donner a priori la quantité fixe γ_0 suivante

(III,36)
$$\gamma_0 = \beta - 2\alpha$$

si $\gamma_0 = 0$, cas étudié par PARKS ([60]), la quantité $\left[f(t) - \tilde{f}(t)\right]^2$ est affectée d'un poids constant sur la demi-droite $t \geqslant 0$. Par contre, si $\gamma_0 > 0$, cette quantité sera affectée d'un poids d'autant plus grand que $\gamma_0 t$ sera plus faible et il en résultera une meilleure approximation $\tilde{f}(t)$ pour les faibles valeurs de t et une moins bonne approximation pour les grandes valeurs de t.

En définitive γ_o étant fixé a priori, m_1 et m_2 ne dépendent plus ni de α ni de β. Nous supposerons N suffisamment grand afin que $(\beta N + \alpha) \geqslant m_2 + \alpha(\beta - \alpha) m_1$. Dans ces conditions (III, 35) s'écrit, compte tenu de (III, 36)

(III,37) $$\varepsilon_N^2 \leqslant \frac{4 m_2 + (\beta^2 - \gamma_o^2) m_1 - 2(\beta - \gamma_o)}{4 \beta N}$$

la borne supérieure de l'erreur est minimale pour

(III,38) $$\beta = \beta_o = \sqrt{\frac{4 m_2 - \gamma_o^2 m_1 + 2\gamma_o}{m_1}}$$

et par conséquent pour

(III,39) $$\alpha = \alpha_o = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{4 m_2 - \gamma_o^2 m_1 + 2\gamma_o}{m_1}} - \gamma_o\right]$$

la relation (III, 37) montre que

$$4 m_2 + (\beta^2 - \gamma_o^2) m_1 - 2(\beta - \gamma_o) \geqslant 0$$

c'est-à-dire

$$4 m_2 - \gamma_o^2 m_1 + 2\gamma_o \geqslant \beta(2 - \beta m_1)$$

inégalité valable $\forall \beta > 0$, pourvu que les hypothèses h'_1 et h'_2 soient vérifiées, et donc en particulier pour $\beta = \frac{1}{m_1}$ d'où

$$4 m_2 - \gamma_o^2 m_1 + 2\gamma_o \geqslant \frac{1}{m_1} > 0$$

il en résulte que les valeurs optimales α_o et β_o précédemment calculées sont réelles.

Il suffit de reporter les expressions de α_o et β_o dans (III, 35) pour obtenir une borne supérieure de l'erreur dans les conditions optimales

(III,40) $$\varepsilon_{No}^2 \leqslant \frac{1}{2N}\left[\sqrt{m_1(4 m_2 - \gamma_o^2 m_1 + 2\gamma_o)} - 1\right]$$

En conclusion, une quantité γ_o précisant la définition de ε_N^2 étant fixée a priori, la borne supérieure de l'erreur est donnée par (III, 35), borne supérieure qui peut d'ailleurs être atteinte. Nous en avons déduit les valeurs optimales α_o et β_o conférant à ε_N^2 la valeur minimale ε_{No}^2.

Il est intéressant de noter que, contrairement aux méthodes classiques, celle que nous avons développée n'exige pas la connaissance de l'expression analytique de f(t) ; en effet, pour appliquer cette méthode, il suffit de connaître m_1 et m_2 et l'optimalisation qui en résulte est la meilleure qui puisse être réalisée lorsque les renseignements sur f(t) sont réduits à la seule connaissance de m_1 et m_2. La méthode peut donc être particulièrement intéressante dans le cas où f(t) est un signal physique.

CHAPITRE II

RELATIONS ENTRE TRANSFORMATION DE LAGUERRE ET TRANSFORMATION DE POISSON

Une transformation intégrale, dite de Poisson, qui trouve son origine dans la théorie statistique de la photo-détection ([61]) a récemment retenu l'attention de nombreux auteurs ([62 à 69]). L'application en théorie des signaux et systèmes a également été proposée ([63, 68]). Une relation entre transformée Z, transformée de Poisson et transformée de Laplace est signalée dans la littérature ([63]) mais cette relation n'a guère été véritablement exploitée. Aussi, après avoir rappelé la définition de la transformation de Poisson et la relation avec la transformation Z, nous établirons quelques propriétés inédites. Nous ne rappellerons pas les propriétés connues.

1 - RAPPELS SUR LA TRANSFORMATION DE POISSON

La transformée de Poisson d'une fonction f(t) est la fonction de la variable discrète $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ que nous noterons f^*_n et ainsi définie

$$f^*_n = P_n\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^n}{n!} f(t)\, dt \qquad \text{(III,41)}$$

Notons que l'existence de la transformée de Laplace d'une fonction pour p = 1 suffit à assurer l'existence de sa transformée de Poisson. Cette condition d'existence de la transformée de Poisson sera supposée satisfaite pour toutes les fonctions envisagées ci-dessous.

Compte tenu de la correspondance

$$\frac{t^n}{n!} \dashv e^{\frac{t}{z}}$$

on obtient la relation établie par BOLGIANO et PIOVOSO ([63])

$$f^*_n \dashv F\left(1 - \frac{1}{z}\right) \qquad \text{(III,42)}$$

où F(p) désigne la transformée de Laplace de f(t).

Cette relation permet d'une part de faciliter le calcul de la transformée de Poisson d'une fonction f(t) dont on connaît la transformée de Laplace et d'autre part d'établir de nombreuses propriétés inédites. Ce dernier point semble ignoré dans la littérature.

2 - SUR QUELQUES PROPRIETES INEDITES

2.1- Exemple d'application de la relation avec la transformation Z

Considérons la fonction g(t) ainsi définie

$$g(t) = t^{\frac{\nu}{2}} \int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{ut})\, u^{-\frac{\nu}{2}} f(u)\, du \qquad \nu > -1$$

les transformées de Laplace de f(t) et g(t) vérifient la relation

$$G(p) = \frac{1}{p^{\nu+1}} F\left(\frac{1}{p}\right)$$

et par conséquent, d'après (III, 42)

$$g_n^* \dashv \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\nu+1} H(z-1)$$

avec

$$H(z) = F\left(\frac{z+1}{z}\right) \vdash (-1)^n f_n^*$$

d'où, compte tenu de la correspondance (I, 70 b) pour la transformation Z

(III,43)
$$g_n^* = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+\nu}{n-j} (-1)^j f_j^*$$

relation qui permet de calculer la transformée de Poisson de g(t) lorsque la transformée de Poisson de f(t) est connue.

A l'aide des propriétés de la transformation Z et de la transformation de Laplace il serait ainsi possible d'établir de nombreuses propriétés inédites pour la transformation de Poisson. Cependant, au paragraphe suivant, nous nous limiterons à quelques relations simples avec la transformation de Laguerre.

2.2- Relations entre transformées de Laguerre et de Poisson

D'après (III, 2) la transformée Z de la transformée de Laguerre $f_n(\beta-1, \beta)$ d'une fonction f(t) vérifie la relation

$$f_n(\beta-1, \beta) \dashv \frac{\beta z}{z-1} F\left(\frac{\beta z}{z-1} - \beta + 1\right)$$

aussi, compte tenu de (I, 70 c) et (I, 2)

$$\beta^{-(n+1)} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j f_j(\beta-1, \beta) \dashv F\left(1 - \frac{1}{z}\right) = Z\{f_n^*\}$$

et la transformée de Poisson s'exprime à l'aide de la transformée de Laguerre $f_n(\beta-1, \beta)$ par la relation

(III,44)
$$f_n^* = \beta^{-(n+1)} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j f_j(\beta-1, \beta)$$

De même, d'après (III, 42)

$$\beta \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-\beta)^j f_j^* \dashv \frac{\beta z}{z-1} F\left(\frac{\beta z}{z-1} - \beta + 1\right) = Z\left\{f_n(\beta-1, \beta)\right\}$$

et la transformée de Laguerre $f_n(\beta-1, \beta)$ s'exprime à l'aide de la transformée de Poisson par la relation

(III, 45). $$f_n(\beta-1, \beta) = \beta \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-\beta)^j f_j^*$$

Application : Généralisation de la relation d'inversion de la transformation de Poisson

Si la fonction f(t) vérifie les hypothèses h_1, h_2 et h_3 du théorème d'inversion de la transformation de Laguerre pour $\alpha = \beta - 1$, alors

(III, 46) $$f(t) = e^{-(\beta-1)t} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\beta-1, \beta)\, L_n(\beta t)$$

relation qui, compte tenu de (III, 45), permet de calculer f(t) lorsque la transformée de Poisson f^*_n est connue. A notre connaissance, cette formule d'inversion de la transformation de Poisson ne semble avoir été publiée que dans les deux cas particuliers $\beta = 1$ et $\beta = 2$ ([62], [64]).

La relation (III, 46) permet d'étendre à la transformation de Poisson nos conclusions relatives à l'erreur ε_N^2 qui résulte de la prise en considération des N premières valeurs f^*_n seulement, lors d'un calcul numérique de f(t).

Etude de deux cas particuliers

Nous envisagerons deux cas particuliers susceptibles de se présenter en théorie des circuits.

Premier cas particulier

Considérons deux fonctions f(t) et g(t) vérifiant la relation intégrale

$$g(t) = t^{\frac{\nu}{2}} \int_0^{\infty} J_\nu(2\sqrt{ut})\, u^{-\frac{\nu}{2}} f(u)\, du$$

les transformées de Laplace vérifient alors la relation

$$G(p) = \frac{1}{p^{\nu+1}} F\left(\frac{1}{p}\right)$$

et par conséquent, d'après (III, 2) et (III, 42)

$$g_n(0,1) \dashv \left(\frac{z}{z-1}\right)^{-\nu} F\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{-\nu} Z\left\{f_n^*\right\}$$

$$g_n^* \dashv \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\nu+1} F\left(\frac{z}{z-1}\right) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\nu} Z\left\{f_n(0,1)\right\}$$

si $\nu = 0$ ces relations s'interprètent immédiatement

(III,47) $$\mathcal{L}_n^{0,1}\left\{\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut})\,f(u)\,du\right\} = P_n\{f(t)\}$$

(III,48) $$P_n\left\{\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut})\,f(u)\,du\right\} = \mathcal{L}_n^{0,1}\{f(t)\}$$

si $\nu \neq 0$, nous ferons usage de la correspondance

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^\alpha \vdash \binom{n+\alpha-1}{n}$$

et du théorème de convolution réelle (I,6) pour la transformation Z afin d'obtenir

(III,49) $$g_n(0,1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{j-\nu-1}{j} f_{n-j}^*$$

(III,50) $$g_n^* = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+\nu-1}{j} f_{n-j}(0,1)$$

Notons que si $\nu = m$ est un entier positif ou nul, la relation (III,49) se réduit à

(III,49 a) $$g_n(0,1) = \sum_{j=0}^{\mathrm{Inf}\{n,m\}} (-1)^j \binom{m}{j} f_{n-j}^* \qquad m \in \mathbb{N}$$

où Inf $\{n,m\}$ désigne le plus petit des deux nombres entiers n et m.

Deuxième cas particulier

Considérons deux fonctions f(t) et g(t) vérifiant la relation intégrale

$$g(t) = \int_0^t J_\nu\left(2\sqrt{au(t-u)}\right)\left(\frac{t-u}{au}\right)^{\frac{\nu}{2}} f(u)\,du$$

les transformées de Laplace vérifient alors la relation

$$G(p) = \frac{1}{p^{\nu+1}}\,F\left(p + \frac{a}{p}\right)$$

d'après (III, 2) et (III, 42)

$$g_n(0,a) \dashv \left(\frac{az}{z-1}\right)^{-\nu} F\left(\frac{az}{z-1} + \frac{z-1}{z}\right)$$

$$g_n^* \dashv \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\nu+1} F\left(\frac{az}{z-1} + \frac{z-1}{z}\right)$$

et par conséquent

$$g_n(0,a) \dashv a^{-\nu}\left(\frac{z}{z-1}\right)^{-(2\nu+1)} Z\{g_n^*\}$$

cette relation interprétée à l'aide de la correspondance

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^{-(2\nu+1)} \vdash \binom{n-2\nu-2}{n}$$

et du théorème de convolution réelle (I, 6) pour la transformation Z signifie

(III, 51) $$g_n(0,a) = a^{-\nu} \sum_{j=0}^{n} \binom{j-2\nu-2}{j} g^*_{n-j}$$

si 2ν = m est un entier positif ou nul, cette relation devient

(III, 51 a) $$g_n(0,a) = a^{-\nu} \sum_{j=0}^{E_n\{n,m+1\}} \binom{m+1}{j} (-1)^j g^*_{n-j} \qquad m \in \mathbb{N}$$

De même, de la correspondance

$$g^*_n \dashv a^{\nu} \left(\frac{z}{z-1}\right)^{2\nu+1} Z\{g_n(0,a)\}$$

on déduit

(III, 52) $$g^*_n = a^{\nu} \sum_{j=0}^{n} \binom{j+2\nu}{j} g_{n-j}(0,a)$$

On pourrait établir de nombreuses autres relations inédites d'intérêt variable suivant les cas, mais nous allons clore ici ce chapitre, notre objectif étant d'une part de montrer que la transformée de Poisson peut se déduire de la transformée de Laguerre et d'autre part d'illustrer les avantages qui résultent de l'utilisation de la transformation Z conjointement avec la transformation de Laplace.

CHAPITRE III

INVERSION NUMERIQUE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE A L'AIDE DES POLYNOMES DE LAGUERRE

L'inversion de la transformation de Laplace, c'est-à-dire la détermination de la fonction originale f(t) à partir de sa transformée de Laplace F(p), ne présente aucune difficulté dans les cas favorables où l'usage d'une table de transformées est possible. Cependant, de nombreux problèmes physiques conduisent à des transformées de Laplace F(p) ne figurant pas dans les tables et l'inversion devient alors nettement plus compliquée. Les formules d'inversion réelles, d'intérêt théorique, sont en général inexploitables quant à la formule d'inversion complexe de Mellin-Fourier non seulement elle doit être manipulée avec circonspection mais encore elle conduit souvent à des calculs très laborieux. Dans le cas particulier important où F(p) se présente sous la forme du quotient de deux polynômes en p il est nécessaire de calculer, avec précision, les racines du dénominateur (réelles et complexes), leur ordre de multiplicité et les résidus correspondants ; aussi si le dénominateur est un polynôme de degré relativement élevé, les calculs peuvent être très laborieux.

Diverses méthodes évitant les difficultés précédentes ont été proposées. Ce sont des méthodes essentiellement numériques, de ce fait naguère d'intérêt limité, mais aujourd'hui particulièrement bien adaptées aux calculateurs modernes. De très nombreuses et très récentes publications témoignent de l'intérêt que suscitent, à l'heure actuelle, de telles méthodes.

Entre autres, l'inversion de la transformation de Laplace à l'aide des polynômes de Laguerre a été envisagée dès 1935 par TRICOMI ([70]) puis ensuite par de nombreux auteurs. L'examen des diverses publications révèle l'absence d'un support théorique solide et surtout l'absence d'une méthode vraiment efficace pour le calcul des coefficients intervenant dans le développement de la fonction originale f(t). C'est pourquoi, notre étude relative à la transformation de Laguerre compte tenu de la relation fondamentale (III, 2) confère à cette intéressante méthode d'inversion numérique de la transformation de Laplace une vigueur et des possibilités nouvelles.

1 - DESCRIPTION DE LA METHODE

1.1- Formules d'inversion

Soit à déterminer une approximation $\tilde{f}(t)$ pour une fonction f(t) dont on connaît la transformée de Laplace F(p). Nous supposerons que toutes les fonctions f(t) envisagées satisfont aux hypothèses h_1, h_2 et h_3 du théorème d'inversion de la transformation de Laguerre. Il résulte de notre étude relative à la transformation de Laguerre que le problème est alors résolu par la paire de relations

(III, 28)
$$\tilde{f}(t) = e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{N-1} f_n(\alpha,\beta)\, L_n(\beta t)$$

(III, 2 bis)
$$f_n(\alpha,\beta) = Z^{-1}\left\{ \frac{\beta z}{z-1} F\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right)\right\}$$

Plusieurs auteurs ont proposé des cas particuliers de la forme (III, 28). Ainsi AIGRAIN et WILLIAMS ([71]) utilisent $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ tandis que la méthode développée par PAPOULIS ([72]) correspond à $\alpha = \beta = 1$. Le choix $\alpha = 0$ qui revient à supprimer le terme exponentiel a aussi été envisagé. WARD ([73]) a étudié le cas $\alpha = \frac{\beta}{2}$ et a montré qu'il était possible, par un choix convenable de β, d'améliorer la convergence de la série d'inversion.

Les méthodes préconisées dans la littérature pour le calcul des coefficients $f_n(\alpha, \beta)$ diffèrent entre elles. Par exemple, WEEKS ([74]) calcule ces coefficients par interpolation trigonométrique de F(p), méthode relativement compliquée qui présente l'inconvénient d'introduire une erreur inutile dans le calcul de $f_n(\alpha,\beta)$.

En 1968, nous avons publié un article ([52]) proposant le calcul des coefficients $f_n(\alpha, \beta)$ à l'aide de (III, 2 bis), cette méthode nous semblant fort intéressante. En effet, non seulement elle n'introduit pas d'erreur inutile dans le calcul des coefficients, mais surtout elle permet de mettre en oeuvre les puissantes méthodes d'inversion de la transformation Z souvent aisément programmables sur calculateur numérique. A ce sujet, il convient de noter que certaines des propriétés originales que nous avons établies pour la transformation Z s'avèrent fort utiles.

Comme nous l'avons signalé ([52]) la relation (III, 3 b) exprimant $f_n(\alpha,\beta)$ en fonction des dérivées successives de F(p) se prête mal au calcul numérique des coefficients et n'a en général qu'un intérêt théorique. Notons cependant que si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ on retrouve la relation indiquée par PICONE ([75])

$$f_n(0,1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{F^{(j)}(1)}{j!}$$

et si $\alpha = \beta = 1$ on retrouve, en introduisant les coefficients γ_n du développement de F(p) suivant les puissances ascendantes de p, la relation établie par WEISS ([76])

$$f_n(1,1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \gamma_j \qquad \gamma_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$$

1.2- Considérations pratiques

1.2.1- Sur le choix de α et β

Un choix convenable des valeurs numériques α et β permet d'améliorer considérablement l'approximation $\tilde{f}(t)$ comme le prévoit la théorie et comme le confirme l'expérience. Fort heureusement ce choix, particulièrement en ce qui concerne α, n'est pas trop critique ; généralement une valeur satisfaisante de α pourra être obtenue à partir de considérations physiques ou autres. Par exemple, dans le cas particulier important où F(p) est une fraction rationnelle en p, l'expérience prouve qu'il est généralement intéressant de prendre pour α la moyenne arithmétique des pôles changée de signe, moyenne arithmétique que l'on sait calculer très simplement.

Intuitivement on peut penser que l'aptitude d'une combinaison linéaire des fonctions $\lambda_n(t) = e^{-\alpha t} L_n(\beta t)$ à représenter une fonction arbitraire f(t) est intimement liée à la nature oscillatoire de ces fonctions. L'approximation risque donc de devenir médiocre dès lors que toutes les fonctions $\lambda_n(t)$ ($n \leqslant N - 1$) cessent d'osciller, c'est-à-dire dès lors que βt est supérieure à la plus grande des racines de $L_{N-1}(x)$. Les nombreux exemples testés ont montré que l'approximation est satisfaisante sur l'intervalle (0, T) tel que

$$\beta T = 2(N-1)$$

pourvu que α soit convenablement choisi et que N soit assez grand. Par conséquent, si l'on désire connaître f(t) sur l'intervalle (0, T) avec une précision satisfaisante et si l'on se donne N, il convient d'essayer dans un premier temps la valeur

(III,53) $$\beta = \frac{2(N-1)}{T}$$

On calcule alors $f_n(\alpha, \beta)$ à l'aide de (III, 2 bis). Généralement, si N est assez grand, $|f_n(\alpha, \beta)|$ décroît rapidement lorsque n croît et $\tilde{f}(t)$ calculée à l'aide de (III, 28) constitue une bonne approximation de f(t) sur l'intervalle (0, T).

Si $|f_n(\alpha, \beta)|$ précédemment calculé ne décroît pas ou ne décroît pas assez vite, on y remédiera généralement en augmentant β ; mais alors on doit en accord avec (III, 53) ou bien augmenter N ou bien se contenter d'un intervalle moins étendu ($0, T' < T$).

1.2.2- Sur le calcul de $\tilde{f}(t)$

Si l'on ne dispose pas de calculateur programmable, on fera usage d'une table de valeurs numériques des polynômes de Laguerre pour sommer la série (III, 28). Cependant, les calculs numériques sont alors assez longs et assez pénibles.

Par contre le calcul de $\tilde{f}(t)$ pour diverses valeurs de t est très rapide sur un calculateur programmable, même modeste. La série (III, 28) peut être sommée directement $L_n(\beta t)$ étant calculé à l'aide de la relation de récurrence bien connue pour les polynômes de Laguerre

$$(n+1)\,L_{n+1}(\beta t) = (2n+1-\beta t)\,L_n(\beta t) - n\,L_{n-1}(\beta t)$$

L'intéressante méthode de sommation des séries de polynômes orthogonaux due à SMITH ([77]) et évitant la propagation des erreurs est cependant préférable. Considérons la relation de récurrence

$$\begin{cases} S_k = f_k(\alpha,\beta) + \left(2 - \dfrac{\beta t+1}{k+1}\right) S_{k+1} - \dfrac{k+1}{k+2}\, S_{k+2} & k \leqslant N-1 \\ S_{N+1} = S_N = 0 \end{cases}$$

on a alors

$$S_0 = \sum_{n=0}^{N-1} f_n(\alpha,\beta)\, L_n(\beta t)$$

Par conséquent, il suffit de calculer S_o à l'aide de la relation de récurrence ci-dessus et $\tilde{f}(t) = e^{-\alpha t} S_o$.

1.2.3- Sur l'estimation de l'erreur

Une première méthode de contrôle de l'erreur de troncature $\Delta f = |f(t) - \tilde{f}(t)|$ consiste à calculer f(t) avec N termes puis avec (N + L) termes ($L \sim \frac{N}{4}$).

Une deuxième méthode, empirique certes mais conduisant à d'excellents résultats en pratique, se déduit de (III, 29). Soit $f_{N_o}(\alpha, \beta)$ le dernier terme non nul du spectre $\{f_o(\alpha, \beta), f_1(\alpha, \beta), \ldots, f_{N-1}(\alpha, \beta)\}$ de $\tilde{f}(t)$. Supposons que les termes non nuls de ce spectre décroissent en valeur absolue au moins comme $\frac{1}{q^n}$ avec $q > 1$. En supposant que les termes suivants décroissent aussi vite on déduit de la relation (III, 29) la formule empirique à notre connaissance inédite

(III, 54)
$$\Delta f \sim \frac{|f_{N_o}(\alpha,\beta)|}{q-1}\, e^{\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)t}$$

Si $(\beta - 2\alpha) \leqslant 0$, l'erreur maximale sur la demi-droite $t \geqslant 0$ est de l'ordre de $\frac{|f_{N_o}(\alpha,\beta)|}{q-1}$.

Dans le cas $(\beta - 2\alpha) > 0$, l'intervalle $(0,T)$ pour lequel l'erreur n'excède pas une valeur Δf donnée a priori peut être déterminé approximativement à l'aide de la relation empirique

(III, 54 bis)
$$(\beta - 2\alpha)T \sim 2 \operatorname{Log} \frac{(q-1)\Delta f}{|f_{N_0}(\alpha,\beta)|}$$

Sur une feuille de papier semi-logarithmique cette relation peut être représentée par une droite d'où le graphique de la figure 1 qui permet de déterminer rapidement une valeur approximative de T telle que sur l'intervalle $(0,T)$ l'erreur n'excède pas Δf. Cette méthode très simple a donné d'excellents résultats pour les nombreux exemples testés.

1.2.4- Remarques

En pratique, pour inverser une transformée de Laplace F(p) il est parfois avantageux de décomposer cette transformée de Laplace en l'écrivant sous la forme

$$F(p) = \Phi(p) + H(p)$$

où $\Phi(p)$ et H(p) sont les transformées de deux fonctions $\varphi(t)$ et h(t).

Parfois, H(p) ou $\Phi(p)$ pourra être inversée analytiquement. Par exemple, lorsque f(t) tend vers une limite finie $f(\infty)$ lorsque t tend vers l'infini il peut être avantageux d'inverser numériquement la transformée de Laplace

$$\Phi(p) = F(p) - \frac{f(\infty)}{p}$$

où

$$f(\infty) = \lim_{p \to 0} pF(p)$$

et finalement

$$\tilde{f}(t) = f(\infty) + \tilde{\varphi}(t)$$

Parfois, ni H(p), ni $\Phi(p)$ ne pourront être inversées analytiquement mais la décomposition précédente reste cependant intéressante dans la mesure où l'inversion numérique de H(p) et $\Phi(p)$ avec des valeurs différentes de α et β peut améliorer l'approximation $\tilde{f}(t)$ qui s'écrit dans ce cas

$$\tilde{f}(t) = e^{-\alpha_1 t} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(\alpha_1,\beta_1) L_n(\beta_1 t) + e^{-\alpha_2 t} \sum_{n=0}^{N-1} h_n(\alpha_2,\beta_2) L_n(\beta_2 t)$$

La généralisation à la décomposition de F(p) en plus de deux transformées de Laplace est immédiate.

2 - CAS PARTICULIER DES FRACTIONS RATIONNELLES

Dans le cas particulier important où F(p) est une fraction rationnelle en p de la forme

(III, 55) $$F(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_{m-1} p^{m-1}}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}$$

la relation (III, 2 bis) peut s'écrire

(III, 56) $$f_n(\alpha,\beta) \dashv \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_{m-1} z^{-(m-1)}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \cdots + d_m z^{-m}}$$

avec

(III, 57) $$\begin{cases} c_\nu = \dfrac{C_\nu}{D_0} \\ d_\nu = \dfrac{D_\nu}{D_0} \end{cases}$$

les coefficients C_ν et D_ν se déduisant des coefficients a_K et b_K de la fraction rationnelle à l'aide des relations suivantes

(III, 58) $$\begin{cases} C_\nu = (-1)^\nu \beta \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} a_k \left[\sum_{j=0}^{\mathrm{Inf}(k,\, m-1-\nu)} \binom{k}{j} \binom{m-1-j}{m-1-\nu-j} \beta^j (-\alpha)^{k-j} \right] \\ D_\nu = (-1)^\nu \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k \left[\sum_{j=0}^{\mathrm{Inf}(k,\, m-\nu)} \binom{k}{j} \binom{m-j}{m-\nu-j} \beta^j (-\alpha)^{k-j} \right] \end{cases}$$

Le théorème d'inversion du quotient de deux transformées Z permet alors de calculer les $f_n(\alpha, \beta)$ de proche en proche à l'aide de la relation de récurrence

(III, 59) $$f_n(\alpha,\beta) = c_n - \sum_{j=1}^{\mathrm{Inf}(n,m)} d_j f_{n-j}(\alpha,\beta) \qquad f_0(\alpha,\beta) = c_0$$

particulièrement bien adaptée au traitement sur calculateur numérique.

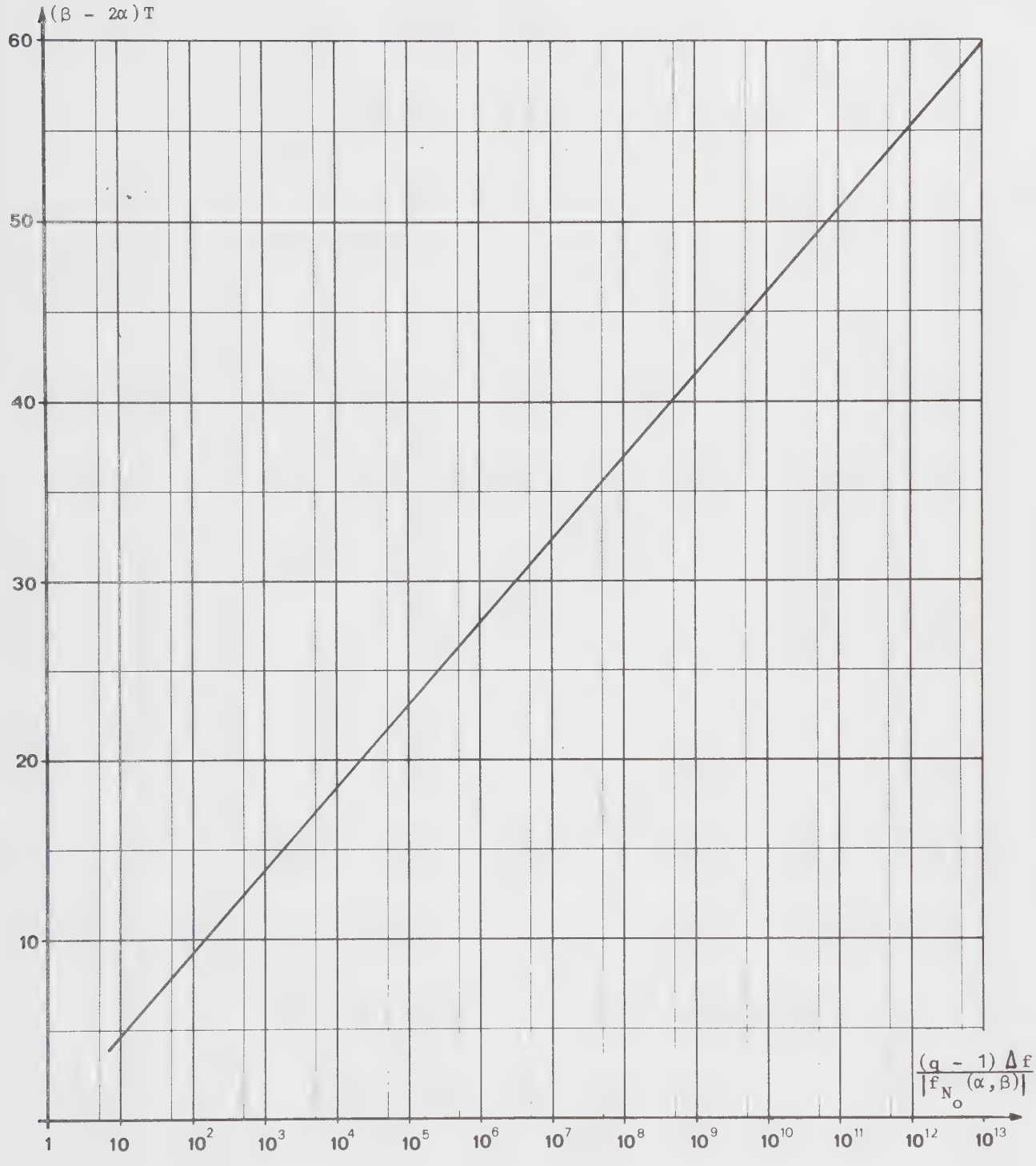

(β - 2α) T
60
50
40
30
20
10
1
10
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
10^8
10^9
10^10
10^11
10^12
10^13
(q - 1) Δf / |f_N_o (α, β)|

fig. 1

Comme nous l'avons déjà signalé, les nombreux exemples numériques testés montrent que l'on peut prendre avec succès pour α la moyenne arithmétique des pôles de F(p) changée de signe soit

(III, 60) $$\alpha = \frac{1}{m} \frac{b_{m-1}}{b_m}$$

L'intérêt pratique de cette formule se trouve accru du fait de sa grande simplicité. De plus, si f(t) est de la forme

$$f(t) = e^{-at} P(t)$$

où P(t) désigne un polynôme en t et si le numérateur et le dénominateur de F(p) n'ont pas de zéro commun (fraction simplifiée), alors l'application de (III,60) conduit à prendre

$$\alpha = a$$

choix qui permettra de calculer rigoureusement f(t) si le nombre N de termes utilisés dans le développement (III, 28) est supérieur d'au moins une unité au degré du polynôme P(t).

Dans le cas général, (III, 60) doit être considérée comme une formule empirique très pratique fournissant un ordre de grandeur satisfaisant pour α ; cette valeur de α pourra éventuellement par la suite être corrigée afin d'améliorer la convergence de la série d'inversion. Quant à β on le déterminera empiriquement comme indiqué au paragraphe 1.2.1.

En définitive, un programme d'inversion numérique à l'aide des polynômes de Laguerre d'une transformée de Laplace de la forme (III, 55) comportera les trois phases suivantes

- Calcul des c_ν et d_ν de (III,56) à partir des a_K et des b_K et de α et β à l'aide de (III, 58).

- Calcul des $f_n(\alpha, \beta)$ pour n = 0, 1, 2, ..., N-1 à l'aide de la relation de récurrence (III, 59).

- Calcul de $\tilde{f}(t)$ à l'aide de (III, 28)pour les valeurs de t désirées.

Remarque

Nous aurions pu consacrer un paragraphe à l'inversion des transformées de Laplace de la forme

$$F(p) = \left[R_1(p)\right]^{\gamma_1} \left[R_2(p)\right]^{\gamma_2} \ldots \left[R_m(p)\right]^{\gamma_m} e^{R(p)}$$

où les $R_K(p)$ et R(p) désignent des fractions rationnelles en p. En effet $Z\{f_n(\alpha, \beta)\}$ est alors de la forme (I, 89) et les relations de récurrence inédites (I, 92) et (I, 96) que nous avons établies en vue de l'inversion de la transformation Z permettent alors de calculer les $f_n(\alpha, \beta)$ de proche en proche. Cette remarque illustre bien les avantages qui résultent de l'usage du symbolisme de la transformation Z pour le calcul des $f_n(\alpha, \beta)$.

3 - RESULTATS NUMERIQUES

Un programme d'inversion numérique de fractions rationnelles en p de la forme (III,55) a été élaboré pour le calculateur WANG 700. Les données a_o, a_1,... a_k, b_o, b_1, ..., b_m ($k < m \leqslant 7$), α et β sont introduites au clavier et imprimées pour contrôle. Le calcul et l'impression des N premiers $f_n(\alpha,\beta)$ s'effectuent très rapidement après introduction de N ($N \leqslant 61$) au clavier, le programme s'arrêtant momentanément lorsque $f_{N-1}(\alpha,\beta)$ est imprimé. Si l'on estime que les $f_n(\alpha,\beta)$ ne décroissent pas assez vite en valeur absolue, on recommence en augmentant β et éventuellement en corrigeant α. Lorsque la convergence est jugée satisfaisante, pour obtenir $\tilde{f}(t)$ sur l'intervalle (t_i, t_f) avec un pas Δt, il suffit d'introduire au clavier les valeurs numériques t_i, t_f et Δt ; le calcul de $\tilde{f}(t)$ est alors effectué selon la méthode de SMITH ([77]) et les résultats sont très rapidement imprimés sous forme d'un tableau de valeurs numériques. Notons la souplesse de la méthode qui permet de modifier le pas Δt et l'intervalle (t_i, t_f) en cours de calcul ou à la fin par simple introduction des nouvelles valeurs numériques $\Delta t'$, t_i', et t_f'. Enfin, une variante du programme précédent construit point par point le graphe de $\tilde{f}(t)$.

L'erreur de troncature Δf peut être contrôlée à l'aide de l'une ou l'autre des deux méthodes précédemment indiquées au paragraphe 1.2.3 ou, mieux encore, à l'aide des deux méthodes.

Exemple 1

Considérons la transformée de Laplace

$$F(p) = \frac{p^2}{125 + 155p + 31p^2 + p^3}$$

exemple choisi par WARD ([73]) qui, rappelons-le, utilise le développement de f(t) en fonctions de Laguerre ($\beta = 2\alpha$). Afin d'illustrer le gain en précision qui peut résulter de l'usage de deux paramètres indépendants α et β, nous avons adopté le même terme exponentiel que Ward ($\alpha = 10$) mais un facteur d'échelle différent ($\beta = 60$ au lieu de 20). Nous avons également utilisé le même nombre de termes que Ward ($N = 7$) pour le calcul de $\tilde{f}(t)$. Les valeurs $\tilde{f}(t)$ calculées avec $\beta = 60$ et avec $\beta = 20$ sont comparées, page 113 , à la valeur exacte f(t). On constate que le choix $\beta = 60$ au lieu de $\beta = 20$ se traduit par un gain en précision considérable sur l'intervalle considéré.

Exemple 2

Considérons la transformée de Laplace

$$F(p) = \frac{1,75 + 3,5p + 2p^2}{0,75 + 2,75p + 3p^2 + p^3}$$

exemple choisi par LIOU ([78]) pour illustrer une méthode matricielle d'inversion numérique de la transformation de Laplace. Les résultats obtenus par Liou et par nous-mêmes($\alpha = 1$, $\beta = 5$, $N = 10$) sont comparés page 114 à la valeur exacte f(t). On constate que nos résultats sont plus précis que ceux de Liou bien que celui-

ci ait calculé, entre autres, une matrice de transition e^{AT} (A étant une matrice) à partir des dix premiers éléments de son développement

$$e^{AT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^k}{k!}$$

Notons, de plus, que la méthode de Liou exige le choix a priori du pas T (période d'échantillonnage) alors que dans la méthode du développement à l'aide des polynômes de Laguerre ce choix se fait a posteriori et n'influe en rien sur le calcul des coefficients.

Exemples 3 et 4

DUBNER et ABATE ([79]) ont montré qu'une transformée de Laplace F(p) pouvait être inversée numériquement à l'aide de la relation

$$f(t) \simeq 2\frac{e^{at}}{T}\left[\frac{1}{2}F(a) + \sum_{k=1}^{M} \mathcal{R}\left\{F\left(a+j\frac{k\pi}{T}\right)\right\}\cos\frac{k\pi}{T}t\right] \quad , \qquad t \leqslant \frac{T}{2}$$

a désignant un paramètre convenablement choisi et $\mathcal{R}$ signifiant '' partie réelle de ''

Considérons la transformée de Laplace

$$F(p) = \frac{p}{1 + 2p^2 + p^4}$$

exemple choisi par Dubner et Abate et correspondant à $f(t) = \frac{t}{2} \sin t$.
Les valeurs $\tilde{f}(t)$ calculées par nous ($\alpha = 0$, $\beta = 2$, $N = 31$) et par Dubner et Abate ($aT = 15$, $T = 20$, $M = 1000$) sont comparées avec les valeurs exactes f(t) à la page 115 . On constate que la prise en considération des N = 31 premiers termes du spectre $\{f_n(\alpha,\beta)\}$ se traduit par une précision encore meilleure que celle qui résulte de l'usage des M = 1000 coefficients $\mathcal{R}\{F(a + j\frac{k\pi}{T})\}$ dans la formule de Dubner et Abate.

Considérons un deuxième exemple envisagé par Dubner et Abate

$$F(p) = \frac{1}{1 + p + p^2}$$

et correspondant à $f(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-0,5\,t} \sin\frac{\sqrt{3}}{2} t$

La comparaison des résultats (page 116) montre, qu'ici encore, avec N = 16, la précision est au moins aussi bonne qu'avec M = 2000 dans la méthode de Dubner et Abate.

Exemple 5

Considérons un filtre de Tchebychev du 5e ordre correspondant à une tolérance d'oscillation du gain de 1 dB crête à crête dans la bande passante et dont la fonction de transfert s'écrit [([80]), p. 85]

$$G(p) = \frac{0,123}{0,123 + 0,581p + 0,974p^2 + 1,689p^3 + 0,937p^4 + p^5}$$

Les résultats relatifs à l'inversion de la transformée de Laplace de la réponse indicielle r(t)

$$R(p) = \frac{0,123}{p(0,123 + 0,581p + 0,974p^2 + 1,689p^3 + 0,937p^4 + p^5)}$$

sont indiqués page 117 . Le dépassement est de 10,2 % et le temps de montée (de 10 à 90 %) est $t_m = 3$ s.

Exemples 6 et 7

Considérons le schéma équivalent de la figure 2 qui est celui d'un étage amplificateur (pente s) où, pour corriger la perturbation apportée en H.F. par la présence d'une capacité parasite ''ramenée'' Γ , on a introduit en série avec la résistance de charge R une self L shuntée par une capacité γ.

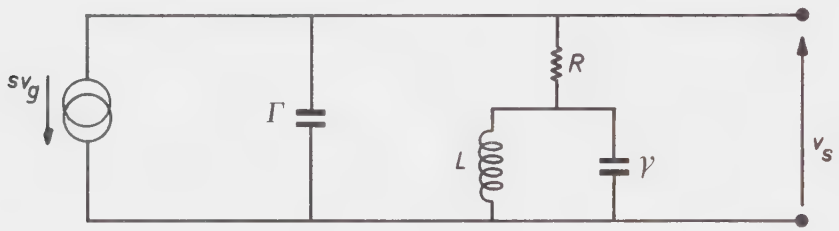


fig. 2

Introduisons la constante de temps $\tau = R\Gamma$ et les paramètres sans dimension

$$\nu = \frac{\gamma}{\Gamma}$$

$$\mu = \frac{L}{R^2\Gamma}$$

La fonction de transfert s'écrit

$$\frac{v_s}{v_g} = -sR \; \frac{1 + \mu\tau p + \mu\nu\tau^2 p^2}{1 + \tau p + \mu(\nu+1)\tau^2 p^2 + \mu\nu\tau^3 p^3}$$

et la réponse indicielle r(t) a pour transformée de Laplace

$$R(p) = -\frac{sR}{p} \; \frac{1 + \mu\tau p + \mu\nu\tau^2 p^2}{1 + \tau p + \mu(\nu+1)\tau^2 p^2 + \mu\nu\tau^3 p^3}$$

d'où l'intérêt que présente l'inversion de la transformée de Laplace

$$F(p) = \frac{1 + \mu p + \mu\nu p^2}{p[1 + p + \mu(\nu+1)p^2 + \mu\nu p^3]}$$

a) Correction d'amplitude

La recherche d'une courbe de réponse en fréquences ''aussi plate que possible'' conduit aux valeurs suivantes [(80), p. 502]

$$\mu = 0,414$$
$$\nu = 0,353$$

pour lesquelles

$$F(p) = \frac{1 + 0,414p + 0,146p^2}{p(1 + p + 0,560p^2 + 0,146p^3)}$$

La réponse indicielle obtenue par inversion de F(p) est représentée à la page 118. On notera, en accord avec GHAUSI [(80), p. 502] un dépassement de 7 % et un temps de montée (de 10 à 90 %) $t_m = 1,2\tau$.

b) Correction de phase

Si l'on désire que l'amplificateur déforme le moins possible les signaux (phase variant ''aussi linéairement que possible'' avec la fréquence) on doit adopter les valeurs suivantes [(80), p. 502]

$$\mu = 0,35$$
$$\nu = 0,22$$

pour lesquelles

$$F(p) = \frac{1 + 0,35p + 0,077p^2}{p(1 + p + 0,427p^2 + 0,077p^3)}$$

La réponse indicielle correspondante est représentée à la page 119. Le dépassement n'est plus que de 1 % tandis que le temps de montée demeure pratiquement inchangé ($t_m = 1,2\tau$).

Exemple 8

Un autre circuit de correction intéressant [(80), p.501] conduit au schéma équivalent de la figure 3.

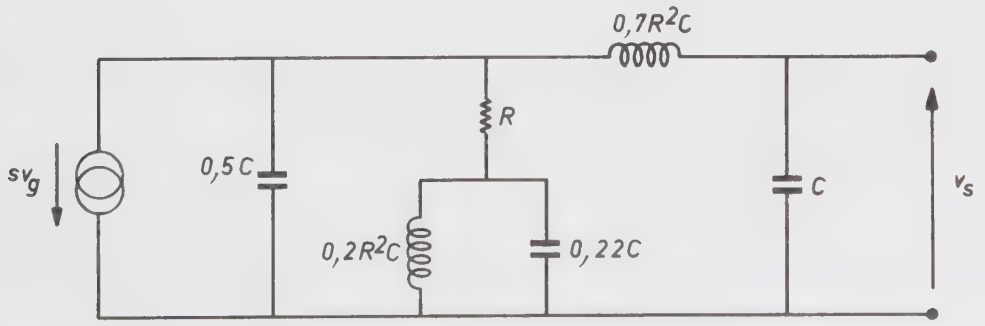


fig. 3

La transformée de Laplace de la réponse indicielle r(t) peut s'écrire en posant RC = τ

$$R(p) = -\frac{sR}{P} \; \frac{1 + 0{,}2\tau p + 0{,}044\,\tau^2 p^2}{1 + 1{,}5\tau p + 1{,}044\tau^2 p^2 + 0{,}416\,\tau^3 p^3 + 0{,}1008\tau^4 p^4 + 0{,}0154\tau^5 p^5}$$

d'où l'intérêt que présente l'inversion de la transformée de Laplace

$$F(p) = \frac{1 + 0{,}2p + 0{,}044\,p^2}{p(1 + 1{,}5p + 1{,}044p^2 + 0{,}416p^3 + 0{,}1008p^4 + 0{,}0154p^5)}$$

La réponse indicielle obtenue par inversion de F(p) est représentée à la page 120 . On notera un dépassement de 0,7 % et un temps de montée $t_m = 1{,}3\,\tau$.

Exemples 9 et 10

On sait qu'un transformateur d'impulsions dont le rapport de transformation est égal à l'unité (hypothèse non restrictive) peut être représenté par le schéma équivalent de la figure 4.

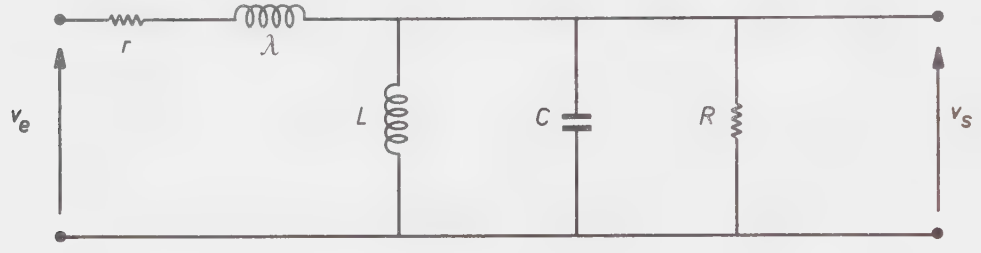


fig. 4

Soit r(t) la réponse indicielle et posons

$$f(t) = \frac{R+r}{R}\, r\left(\sqrt{\frac{R\lambda C}{R+r}}\, t\right)$$

un calcul élémentaire conduit à la transformée de Laplace

$$F(p) = \frac{1}{\left(\frac{R}{R+r}\right)^{3/2}\frac{r}{L}\sqrt{\lambda C} + \left(1 + \frac{R}{R+r}\,\frac{\lambda}{L}\right)p + \sqrt{\frac{R\lambda C}{R+r}}\left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{\lambda}\right)p^2 + p^3}$$

La méthode classique d'étude consiste à chercher pour f(t) une première approximation $f_1(t)$ valable pour les faibles valeurs de t et une deuxième approximation $f_2(t)$ valable pour les grandes valeurs de t, approximations généralement définies par leurs transformées de Laplace respectives

$$F_1(p) = \frac{1}{P\left[1 + \sqrt{\frac{R\lambda C}{R+r}}\left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{\lambda}\right)p + p^2\right]}$$

$$F_2(p) = \frac{1}{P + \left(\frac{R}{R+r}\right)^{3/2} \frac{r}{L}\sqrt{\lambda C}}$$

Nous allons calculer, par inversion numérique de F(p), la réponse d'un transformateur d'impulsions présentant les caractéristiques suivantes

λ = 40 μH

L = 5 mH

C = 50 pF

r = 200 Ω

pour R = 2 kΩ puis pour R = 400 Ω

a) R = 2kΩ

Dans ces conditions

$$f(t) = 1{,}1\, r\,(4{,}2640 \times 10^{-8} t)$$

et l'on a respectivement pour les faibles valeurs de t et les grandes valeurs de t les approximations suivantes

$$f_1(t) = 1 - e^{-0{,}3198t}\,(\cos 0{,}9475t + 0{,}3375 \sin 0{,}9475t)$$

$$f_2(t) = e^{-0{,}0016t}$$

la solution exacte étant en réalité l'originale de

$$F(p) = \frac{1}{0{,}0016 + 1{,}0073p + 0{,}6396p^2 + p^3}$$

L'inversion numérique de cette transformée de Laplace (α = 0,21 ; β = 2 ; N = 27) fournit une approximation $\tilde{f}(t)$ qui coïncide pratiquement avec f(t) sur l'intervalle (0,15) car on vérifie qu'en augmentant N on obtient encore une courbe indiscernable de la première sur cet intervalle. La courbe $\tilde{f}(t)$ qui se confond donc avec la courbe f(t) est représentée en trait plein page 121 tandis que $f_1(t)$ est représentée en pointillés et $f_2(t)$ par des croix.

b) R = 400 Ω

Cette fois

$$f(t) = 1{,}5\, r\,(3{,}6515 \times 10^{-8} t)$$

et l'on a respectivement pour les faibles valeurs de t et les grandes valeurs de t les approximations suivantes

$$f_1(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$$

$$f_2(t) = e^{-0,001\,t}$$

la solution exacte étant en réalité l'originale de

$$F(p) = \frac{1}{0,0010 + 1,0053p + 2p^2 + p^3}$$

L'inversion numérique de cette transformée de Laplace ($\alpha = 0,67$; $\beta = 2$; $N = 27$) fournit une approximation $\tilde{f}(t)$ qui coïncide encore pratiquement avec $f(t)$ sur l'intervalle $(0,15)$. La courbe $\tilde{f}(t)$ qui se confond donc avec la courbe $f(t)$ est représentée en trait plein page 122 tandis que $f_1(t)$ est représentée en pointillés et $f_2(t)$ par des croix.

On remarque que, dans les deux cas, l'approximation $f_1(t)$ est très satisfaisante pour les faibles valeurs de t tandis que l'approximation $f_2(t)$ est très satisfaisante pour les grandes valeurs de t. Toutefois, pour les valeurs intermédiaires de t, l'erreur peut être plus ou moins importante selon les caractéristiques du transformateur d'impulsions. C'est pourquoi, nous pensons que la méthode classique d'étude de la réponse de tels transformateurs pourrait être avantageusement modifiée de la manière suivante :

- On calcule $\tilde{f}(t)$ sur l'intervalle $(0,T)$ par inversion numérique de $F(p)$, N étant choisi suffisamment élevé pour que, en augmentant N on obtienne encore sur cet intervalle une réponse pratiquement indiscernable de la précédente et que l'on ait par conséquent pratiquement $\tilde{f}(t) = f(t)$ sur l'intervalle $(0,T)$.

- De plus, si l'on désire représenter avec une excellente précision la réponse $f(t)$ sur tout l'intervalle $t \geqslant 0$ par la réunion de $\tilde{f}(t)$ et $f_2(t)$ il suffira de choisir T suffisamment élevé pour que $\tilde{f}(t)$ coïncide pratiquement avec $f_2(t)$ au voisinage de $t = T$.

Cette méthode qui, du point de vue numérique, n'est guère plus difficile que la méthode classique à mettre en oeuvre présente sur celle-ci l'avantage de fournir, avec une excellente précision, le comportement de $f(t)$ pour les valeurs intermédiaires de t, avantage parfois fort appréciable.

Exemple 11

Considérons le dispositif de la figure 5 où A désigne un amplificateur opérationnel différentiel

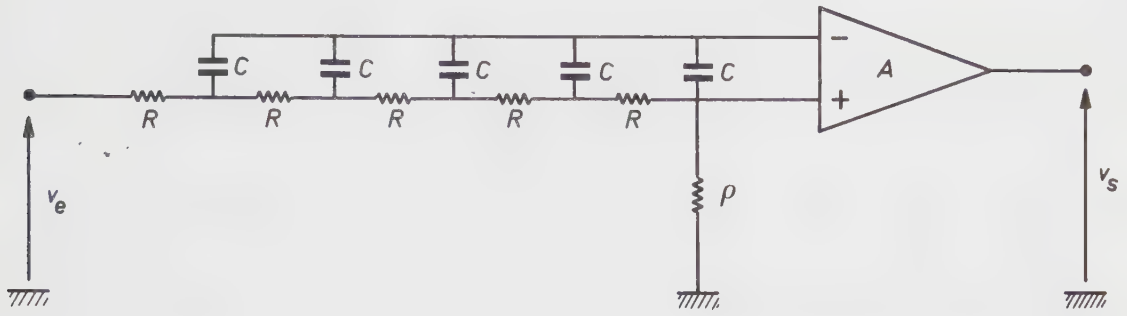


fig. 5

montage imaginé et étudié au laboratoire par le Professeur GENIN.

En posant $\frac{\rho}{R} = \lambda$ et $RC = \tau$ sa fonction de transfert s'écrit

$$G(p) = \frac{\lambda}{\lambda + 5 + 20\tau p + 21\tau^2 p^2 + 8\tau^3 p^3 + \tau^4 p^4}$$

Nous supposerons, sans perte de généralité, $RC = \tau = 1$ s ; l'inversion numérique de G(p) pour diverses valeurs du paramètre λ conduit alors aux courbes de la page 123 représentant la réponse impulsive g(t) pour les valeurs de λ considérées. Notons que les oscillations très amorties pour les faibles valeurs de λ ne semblent plus amorties pour $\lambda = 41{,}25$; une étude théorique permettrait en effet de montrer que les oscillations ne sont plus amorties pour la valeur critique $\lambda = 41{,}25$.

Exemple 12

Considérons le dispositif '' Etouffeur de Vibrations '' ([81]) de la figure 6

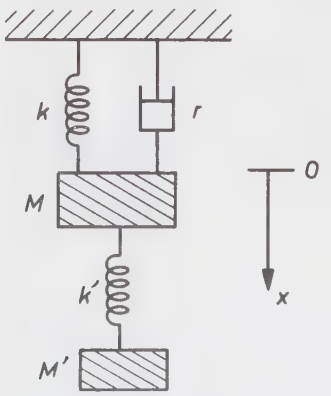


fig. 6

Une masse M est suspendue à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort (coefficient de raideur k) sur lequel on a monté, en parallèle, un amortisseur (coefficient de viscosité r). A la masse M est suspendue une deuxième masse M' par l'intermédiaire d'un deuxième ressort (coefficient de raideur k'). Si une force verticale (suivant Ox) f(t) est appliquée à l'instant t = 0 à la masse M celle-ci va se déplacer avec une vitesse v(t). On montre que les transformées de Laplace de la vitesse v(t) et de la force f(t) vérifient la relation

$$V(p) = \frac{p\,(k' + M'p^2)\,F(p)}{kk' + rk'p + [Mk' + M'(k+k')]p^2 + rM'p^3 + MM'p^4}$$

Considérons un dispositif '' Etouffeur de vibrations '' présentant les caractéristiques suivantes

r = 64 Ns/m k = 1000 N/m k' = 100 N/m M = 10 Kg M' = 1 Kg

et supposons qu'une force verticale sinusoïdale

$$f(t) = 10 \sin 10t \qquad (N)$$

soit appliquée, à l'instant t = 0, à la masse M ; celle-ci va se mettre en mouvement, sa vitesse v(t) ayant pour transformée de Laplace

$$V(p) = \frac{p}{1000 + 64p + 21p^2 + 0{,}64\,p^3 + 0{,}1\,p^4}$$

Les résultats relatifs à l'inversion numérique de cette transformée de Laplace et montrant l'évolution de la vitesse au cours des deux premières secondes sont reproduits page 124 . Cette analyse transitoire présente un intérêt pratique certain ; en effet, si en régime permanent la masse M bien que sollicitée par une force sinusoïdale demeure théoriquement au repos il faudra cependant parfois tenir compte en pratique des vitesses relativement importantes susceptibles d'être atteintes au cours du régime transitoire.

Exemple 1 : $F(p) = \dfrac{p^2}{125 + 155p + 31p^2 + p^3}$

DONNEES

a	0	.000000
	1	.000000
	2	1.000000
b	0	125.000000
	1	155.000000
	2	31.000000
	3	1.000000

ALPHA = 10.00

BETA = 20.00

n	f_n
0	.346320346320ex 00
1	.442270572130ex 00
2	.103043948520ex 00
3	.636261779500ex-01
4	.264443336170ex-01
5	.552822469000ex-02
6	.972038175500ex-02

t	$\tilde{f}(t)$
.000	.998955
.010	.727413
.020	.517660
.030	.356379
.040	.233014
.050	.139213
.075	-.005747
.100	-.073088
.125	-.100431
.150	-.107643
.175	-.105034
.200	-.097882

DONNEES

a	0	.000000
	1	.000000
	2	1.000000
b	0	125.000000
	1	155.000000
	2	31.000000
	3	1.000000

ALPHA = 10.00

BETA = 60.00

n	f_n
0	.713012477718ex 00
1	.237102439110ex 00
2	.392308766900ex-01
3	.852211499000ex-02
4	.165526696800ex-02
5	.333352517000ex-03
6	.668439518000ex-04

t	$\tilde{f}(t)$
.000	.999983
.010	.727124
.020	.517198
.030	.356189
.040	.233163
.050	.139594
.075	-.005427
.100	-.073258
.125	-.100682
.150	-.107980
.175	-.105042
.200	-.097622

t	$\tilde{f}(t)$ ($\beta = 20$)	$\tilde{f}(t)$ ($\beta = 60$)	f(t) (exacte)
0,000	0,998 955	0,999 983	1,000 000
0,010	0,727 413	0,727 124	0,727 117
0,020	0,517 660	0,517 198	0,517 202
0,030	0,356 379	0,356 189	0,356 198
0,040	0,233 014	0,233 163	0,233 164
0,050	0,139 213	0,139 594	0,139 586
0,075	- 0,005 747	- 0,005 427	- 0,005 432
0,100	- 0,073 088	- 0,073 258	- 0,073 233
0,125	- 0,100 431	- 0,100 882	- 0,100 866
0,150	- 0,107 643	- 0,107 980	- 0,108 026
0,175	- 0,105 034	- 0,105 042	- 0,105 134
0,200	- 0,097 882	- 0,097 622	- 0,097 660

Exemple 2 : $F(p) = \dfrac{1{,}75 + 3{,}5p + 2p^2}{0{,}75 + 2{,}75p + 3p^2 + p^3}$

DONNEES

a	0	1.750000
	1	3.500000
	2	2.000000
b	0	.750000
	1	2.750000
	2	3.000000
	3	1.000000

ALPHA = 1.00

BETA = 5.00

f_n	
0	.192929292929ex 01
1	.418324660500ex-01
2	.287437170000ex-01
3	-.158131430000ex-03
4	.293534160000ex-03
5	-.752913600000ex-05
6	.311395370000ex-05
7	-.143651350000ex-06
8	.271712490000ex-07
9	-.121102237100ex-07

t	$\tilde{f}(t)$
.000	1.999999
.100	1.767807
.200	1.567743
.300	1.395146
.400	1.246033
.500	1.117003
.600	1.005145
.700	.907978
.800	.823379
.900	.749539
1.000	.684911

t	$\tilde{f}(t)$	f(t) (exacte)	f(t) (Liou)
0,000	1,999 999	2,000 000	2,000 00
0,100	1,767 807	1,767 807	1,767 81
0,200	1,567 743	1,567 743	1,567 75
0,300	1,395 146	1,395 146	1,395 15
0,400	1,246 033	1,246 033	1,246 04
0,500	1,117 003	1,117 003	1,117 01
0,600	1,005 145	1,005 145	1,005 15
0,700	0,907 978	0,907 978	1,907 982
0,800	0,823 379	0,823 379	0,823 383
0,900	0,749 539	0,749 539	0,749 542
1,000	0,684 911	0,684 911	0,684 914

Exemple 3 : $F(p) = \dfrac{p}{1 + 2p^2 + p^4}$

DONNEES		
a	0	.000000
	1	1.000000
b	0	1.000000
	1	.000000
	2	2.000000
	3	.000000
	4	1.000000

ALPHA = .00

BETA = 2.00

n	f_n
0	.100000000000ex-00
1	-.192000000000ex 00
2	-.832000000000ex-01
3	.665600000000ex-01
4	.627200000000ex-01
5	.727040000000ex-02
6	-.153292800000ex-01
7	-.896204800000ex-02
8	.692224000000ex-04
9	.233062400000ex-02
10	.100497817600ex-02
11	-.131669395200ex-03
12	-.297944350700ex-03
13	-.970826710300ex-04
14	.279260694200ex-04
15	.343004312300ex-04
16	.818629312200ex-05
17	-.430772853300ex-05
18	-.365948605300ex-05
19	-.577465488400ex-06
20	.570649329000ex-06
21	.366693936220ex-06
22	.277786333000ex-07
23	-.687215313100ex-07
24	-.346853520300ex-07
25	.515431302000ex-09
26	.773294726000ex-08
27	.310076803750ex-08
28	-.375599227600ex-08
29	-.81536306[illegible]500ex-09
30	-.249687950880ex-09

t	$\tilde{f}(t)$
.000	.000000
1.000	.420735
2.000	.909297
3.000	.211680
4.000	-1.513604
5.000	-2.397310
6.000	-.838246
7.000	2.299453
8.000	3.957432
9.000	1.854533
10.000	-2.720105

t	$\tilde{f}(t)$	f(t) (exacte)	f(t) (Dubner et Abate)
0,000	0,000 000	0,000 000	0,000 000
1,000	0,420 735	0,420 735	0,420 735
2,000	0,909 297	0,909 297	0,909 297
3,000	0,211 680	0,211 680	0,211 680
4,000	- 1,513 604	- 1,513 604	- 1,513 605
5,000	- 2,397 310	- 2,397 310	- 2,397 310
6,000	- 0,838 246	- 0,838 246	- 0,838 246
7,000	2,299 453	2,299 453	2,299 453
8,000	3,957 432	3,957 432	3,957 433
9,000	1,854 533	1,854 533	1,854 532
10,000	- 2,720 105	- 2,720 105	- 2,720 110

Exemple 4 : $F(p) = \dfrac{1}{1 + p + p^2}$

DONNEES

a	0	1.000000
b	0	1.000000
	1	1.000000
	2	1.000000

ALPHA = .50

BETA = 3.00

n	f_n
0	.307692307692ex 00
1	-.266355029550ex 00
2	-.637232589600ex-01
3	.102237317150ex-01
4	.647467106000ex-02
5	.209662530000ex-03
6	-.465795546000ex-03
7	-.877863058000ex-04
8	.223251267000ex-04
9	.101883583000ex-04
10	-.146692672000ex-06
11	-.805409322000ex-06
12	-.110982233000ex-06
13	.466343715000ex-07
14	.177697595100ex-07
15	.153236961000ex-08

t	$\tilde{f}(t)$
.000	.000000
.500	.377345
1.000	.533507
1.500	.525424
2.000	.419279
2.500	.274109
3.000	.133242
3.500	.022128
4.000	-.049529
4.500	-.083448
5.000	-.087942
5.500	-.073722
6.000	-.050892
6.500	-.027238
7.000	-.007643
7.500	.005713
8.000	.012714
8.500	.014511
9.000	.012806
9.500	.009305
10.000	.005388

t	$\tilde{f}(t)$	f(t) (exacte)	f(t) (Dubner et Abate)
0,000	0,000 000	0,000 000	0,000 0
0,500	0,377 345	0,377 345	0,377 3
1,000	0,533 507	0,533 507	0,533 5
1,500	0,525 424	0,525 424	0,525 4
2,000	0,419 279	0,419 279	0,419 3
2,500	0,274 109	0,274 109	0,274 1
3,000	0,133 242	0,133 242	0,133 2
3,500	0,022 128	0,022 128	0,022 1
4,000	- 0,049 529	- 0,049 529	- 0,049 5
4,500	- 0,083 448	- 0,083 448	- 0,083 4
5,000	- 0,087 942	- 0,087 942	- 0,087 9
5,500	- 0,073 722	- 0,073 722	- 0,073 7
6,000	- 0,050 892	- 0,050 892	- 0,050 9
6,500	- 0,027 238	- 0,027 238	- 0,027 2
7,000	- 0,007 643	- 0,007 643	- 0,007 6
7,500	0,005 713	0,005 714	0,005 7
8,000	0,012 714	0,012 715	0,012 7
8,500	0,014 511	0,014 511	0,014 5
9,000	0,012 806	0,012 804	0,012 8
9,500	0,009 305	0,009 302	0,009 3
10,000	0,005 388	0,005 385	0,005 4

Exemple 5 : $R(p) = \dfrac{0,123}{p(0,123 + 0,581p + 0,974p^2 + 1,689p^3 + 0,937p^4 + p^5)}$

DONNEES

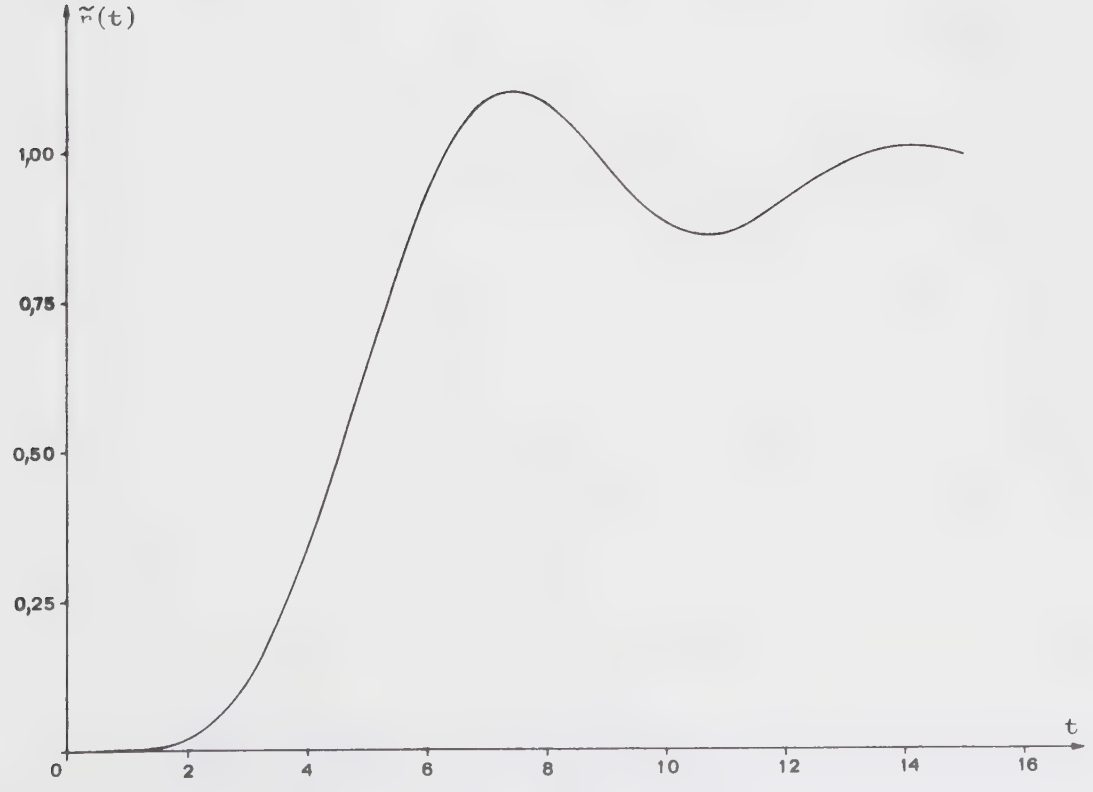
a	0	.123000
b	0	.000000
	1	.123000
	2	.581000
	3	.974000
	4	1.689000
	5	.937000
	6	1.000000

ALPHA = .16

BETA = 3.00

	r_n
0	.441897845804ex-03
1	-.209037633631ex-02
2	.378704034335ex-02
3	-.306724961946ex-02
4	.761282427470ex-03
5	.305497927280ex-03
6	-.965785700150ex-04
7	-.515166644751ex-04
8	.373307962288ex-05
9	.633543186880ex-05
10	.610919950203ex-06
11	-.573501040977ex-06
12	-.156966039638ex-06
13	.342576292767ex-07
14	.218223768640ex-07
15	-.475619626740ex-11
16	-.225253525906ex-08
17	-.364179646907ex-09
18	.173118508646ex-09
19	.655314346423ex-10
20	-.720207686702ex-11
21	-.789177719606ex-11
22	-.516555233493ex-12
23	.747297199000ex-12
24	.192646644568ex-12
25	-.271263014776ex-13

t	$\tilde{r}(t)$
.000	.000000
.500	.000029
1.000	.000849
1.500	.005731
2.000	.021112
2.500	.055383
3.000	.116449
3.500	.208983
4.000	.332292
4.500	.479476
5.000	.636144
5.500	.792549
6.000	.926603
6.500	1.027051
7.000	1.086056
7.500	1.102604
8.000	1.082460
8.500	1.036729
9.000	.979406
9.500	.924503
10.000	.883387
10.500	.862886
11.000	.864513
11.500	.884865
12.000	.917011
12.500	.952474
13.000	.983310
13.500	1.003818
14.000	1.011549
14.500	1.007445
15.000	.995193



Exemple 6 : $F(p) = \dfrac{1 + 0,414p + 0,146p^2}{p(1 + p + 0,560p^2 + 0,146p^3)}$

DONNEES

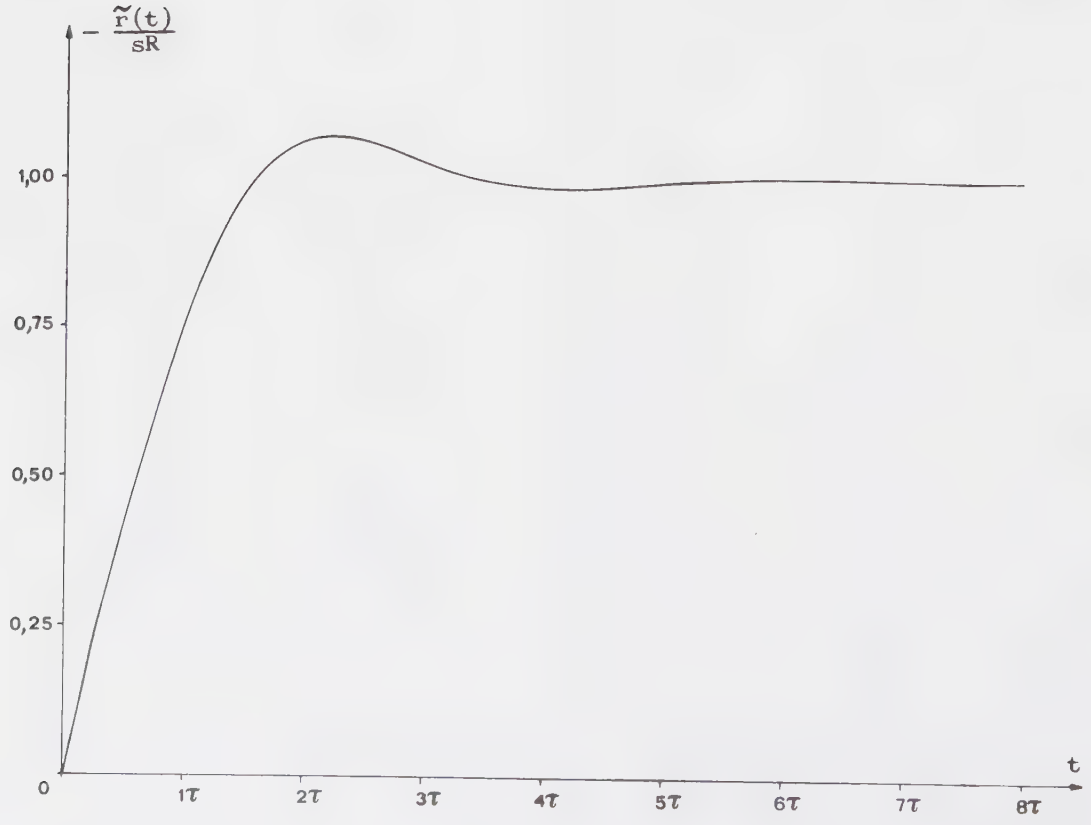
a	0	1.000000
	1	.414000
	2	.146000
b	0	.000000
	1	1.000000
	2	1.000000
	3	.560000
	4	.146000

ALPHA = 1.00

BETA = 5.00

n	f_n
0	.267765190525ex 00
1	-.360099489210ex 00
2	.113999766150ex 00
3	-.196937624500ex-01
4	-.374560094000ex-03
5	-.224931207600ex-02
6	.611362227300ex-03
7	.534682052800ex-04
8	.520086217000ex-05
9	-.195461779500ex-04
10	.444751541500ex-06
11	.101209559354ex-05
12	.322930563570ex-06
13	-.111334869260ex-06
14	-.318339971890ex-07
15	.299026171670ex-08
16	.461236256640ex-08
17	.390265902520ex-09
18	-.234042473600ex-10
19	.296464261670ex-09
20	.439211059143ex-09

t	$\tilde{f}(t)$
.000	.000000
.250	.226623
.500	.424917
.750	.603396
1.000	.758161
1.250	.888136
1.500	.974703
1.750	1.033376
2.000	1.063268
2.250	1.070616
2.500	1.063300
2.750	1.047592
3.000	1.029317
3.250	1.012458
3.500	.999323
3.750	.990784
4.000	.986650
4.250	.986075
4.500	.987925
4.750	.991067
5.000	.994551
5.250	.997699
5.500	1.000122
5.750	1.001684
6.000	1.002431
6.250	1.002527
6.500	1.002183
6.750	1.001606
7.000	1.000971
7.250	1.000401
7.500	.999985
7.750	.999686
8.000	.999558



Exemple 7 : $F(p) = \dfrac{1 + 0{,}35p + 0{,}077\ p^2}{p(1 + p + 0{,}427p^2 + 0{,}077\ p^3)}$

DONNEES

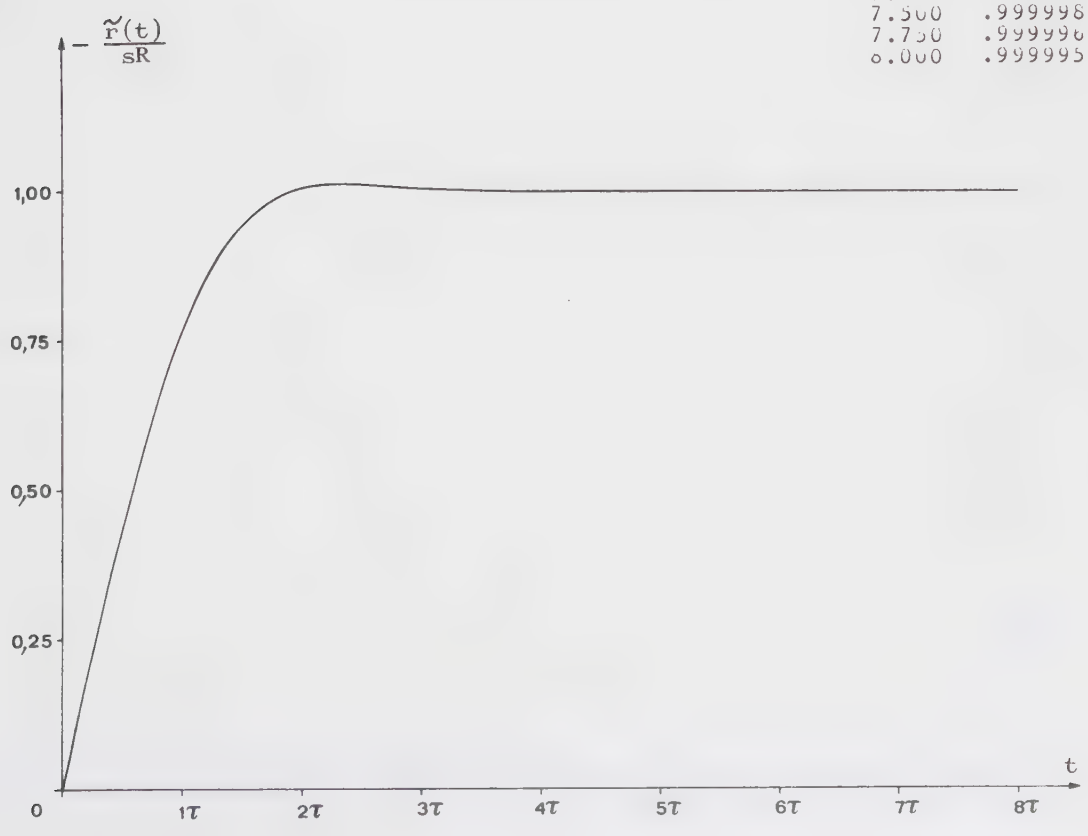
a	0	1.000000
	1	.350000
	2	.077000
b	0	.000000
	1	1.000000
	2	1.000000
	3	.427000
	4	.077000

ALPHA = 1.40

BETA = 5.00

n	f_n
0	.329647856696ex 00
1	-.519373310620ex 00
2	.257075365360ex 00
3	-.820609546200ex-01
4	.252235567500ex-01
5	-.143099430870ex-01
6	.490147302160ex-02
7	-.165474963002ex-02
8	.771326183430ex-03
9	-.292446161250ex-03
10	.102781447559ex-03
11	-.436009285360ex-04
12	.171001877807ex-04
13	-.625007451290ex-05
14	.231984248590ex-05
15	-.997446829980ex-06
16	.373531782490ex-06
17	-.148214254215ex-06
18	.572491729190ex-07
19	-.232353694390ex-07
20	.754171032830ex-08

t	$\tilde{f}(t)$
.000	-.000000
.250	.229001
.500	.433971
.750	.614948
1.000	.762261
1.250	.870864
1.500	.942716
1.750	.984577
2.000	1.004976
2.250	1.011922
2.500	1.011699
2.750	1.008566
3.000	1.004989
3.250	1.002117
3.500	1.000270
3.750	.999338
4.000	.999049
4.250	.999125
4.500	.999355
4.750	.999603
5.000	.999805
5.250	.999940
5.500	1.000015
5.750	1.000044
6.000	1.000047
6.250	1.000038
6.500	1.000025
6.750	1.000013
7.000	1.000005
7.250	1.000001
7.500	.999998
7.750	.999996
8.000	.999995



Exemple 8 : $F(p) = \dfrac{1 + 0,2p + 0,044p^2}{p(1 + 1,5p + 1,044p^2 + 0,416p^3 + 0,1008p^4 + 0,0154p^5)}$

DONNEES

a	0	1.000000
	1	.200000
	2	.044000
b	0	.000000
	1	1.000000
	2	1.500000
	3	1.044000
	4	.416000
	5	.100800
	6	.015400

ALPHA = 1.00

BETA = 5.00

n	f_n
0	.340578700862ex-01
1	-.110568961184ex 00
2	.121957257417ex 00
3	-.429619526370ex-01
4	-.599487756700ex-02
5	.417265162300ex-03
6	.322275785710ex-02
7	.661460745033ex-03
8	-.414800481679ex-03
9	-.407745686159ex-03
10	-.816264347070ex-04
11	.650054479089ex-04
12	.542916813542ex-04
13	.973503375120ex-05
14	-.941729437983ex-05
15	-.725846424355ex-05
16	-.113237067734ex-05
17	.134631302975ex-05
18	.968493303440ex-06
19	.127797832992ex-06
20	-.191282388081ex-06
21	-.126876689496ex-06
22	-.138171672920ex-07
23	.270435834579ex-07
24	.171028302359ex-07
25	.139829860400ex-08
26	-.380433242210ex-08
27	-.226105793741ex-08
28	-.123274338316ex-09
29	.534903416957ex-09
30	.299914021561ex-09

t	$\tilde{r}(t)$
.000	.000000
.250	.006654
.500	.047856
.750	.142541
1.000	.289261
1.250	.467308
1.500	.645989
1.750	.797239
2.000	.905053
2.250	.968134
2.500	.996278
2.750	1.003755
3.000	1.003110
3.250	1.002054
3.500	1.003065
3.750	1.005315
4.000	1.006974
4.250	1.000884
4.500	1.005017
4.750	1.002344
5.000	.999944
5.250	.998535
5.500	.998242
5.750	.998724
6.000	.999467
6.250	1.000054
6.500	1.000305
6.750	1.000257
7.000	1.000065
7.250	.999867
7.500	.999812
7.750	.999845
8.000	.999937

Exemple 9 : $F(p) = \dfrac{1}{0,0016 + 1,0073p + 0,6396p^2 + p^3}$

DONNEES

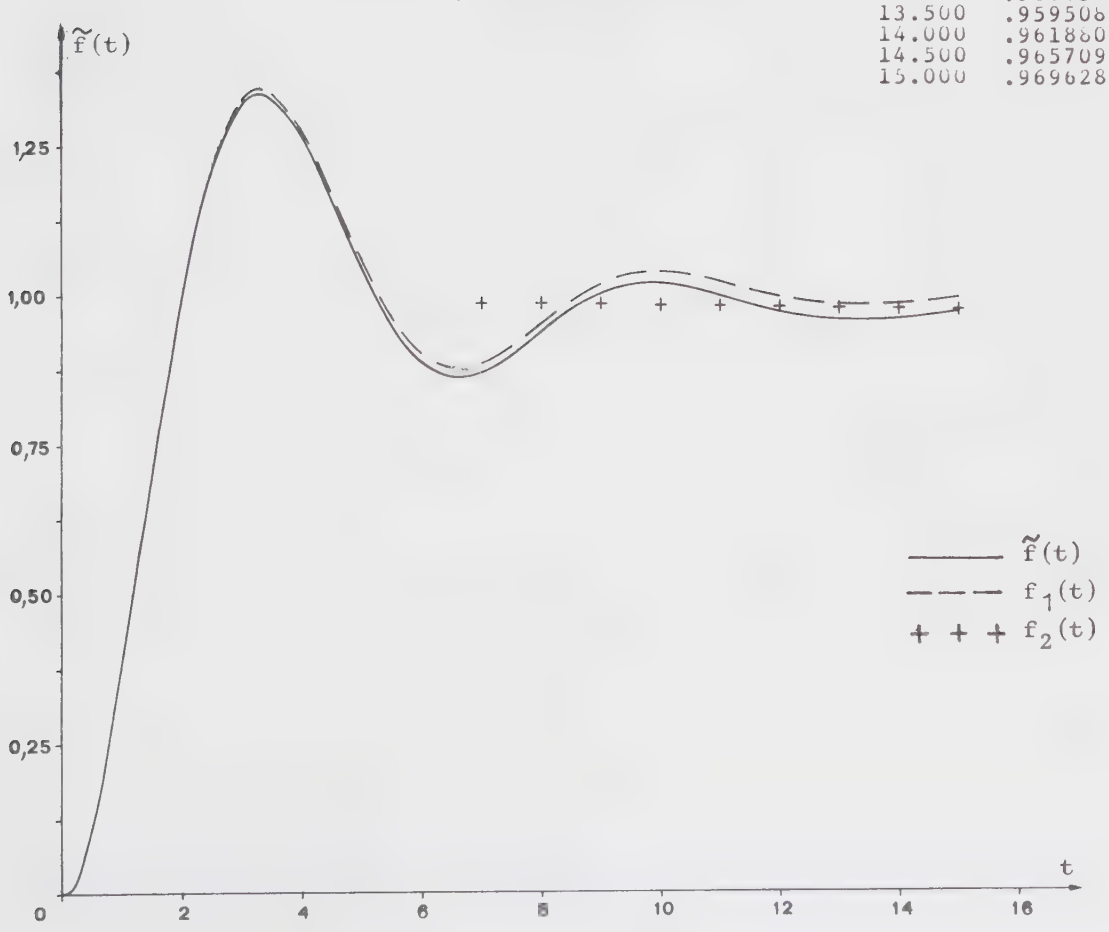
a	0	1.000000
b	0	.001600
	1	1.007300
	2	.639600
	3	1.000000

ALPHA = .21

BETA = 2.00

n	f_n
0	.206564745477ex 00
1	-.352983119950ex 00
2	.745761942900ex-01
3	.618126176300ex-01
4	.169503034100ex-01
5	-.360721732000ex-02
6	-.446834891100ex-02
7	-.124777039624ex-02
8	.236768084900ex-03
9	.313922594770ex-03
10	.925391012600ex-04
11	-.145222017750ex-04
12	-.219993359921ex-04
13	-.683864754610ex-05
14	.867994927000ex-06
15	.153905109874ex-05
16	.504032437980ex-06
17	-.495950883100ex-07
18	-.107072718154ex-06
19	-.366675777550ex-07
20	.298855240500ex-08
21	.770466872860ex-08
22	.286315840060ex-08
23	-.601891790000ex-10
24	-.547620299010ex-09
25	-.345445472160ex-09
26	-.283506114040ex-09

t	$\tilde{f}(t)$
.000	.000000
.500	.110361
1.000	.376766
1.500	.700192
2.000	.996696
2.500	1.210926
3.000	1.320001
3.500	1.329470
4.000	1.264375
4.500	1.158646
5.000	1.045516
5.500	.950703
6.000	.889037
6.500	.864306
7.000	.871473
7.500	.900150
8.000	.938249
8.500	.974995
9.000	1.002843
9.500	1.018185
10.000	1.021037
10.500	1.014044
11.000	1.001207
11.500	.986666
12.000	.973789
12.500	.964674
13.000	.960052
13.500	.959508
14.000	.961880
14.500	.965709
15.000	.969628



Exemple 10 : $$F(p) = \frac{1}{0{,}0010 + 1{,}0053p + 2p^2 + p^3}$$

DONNEES

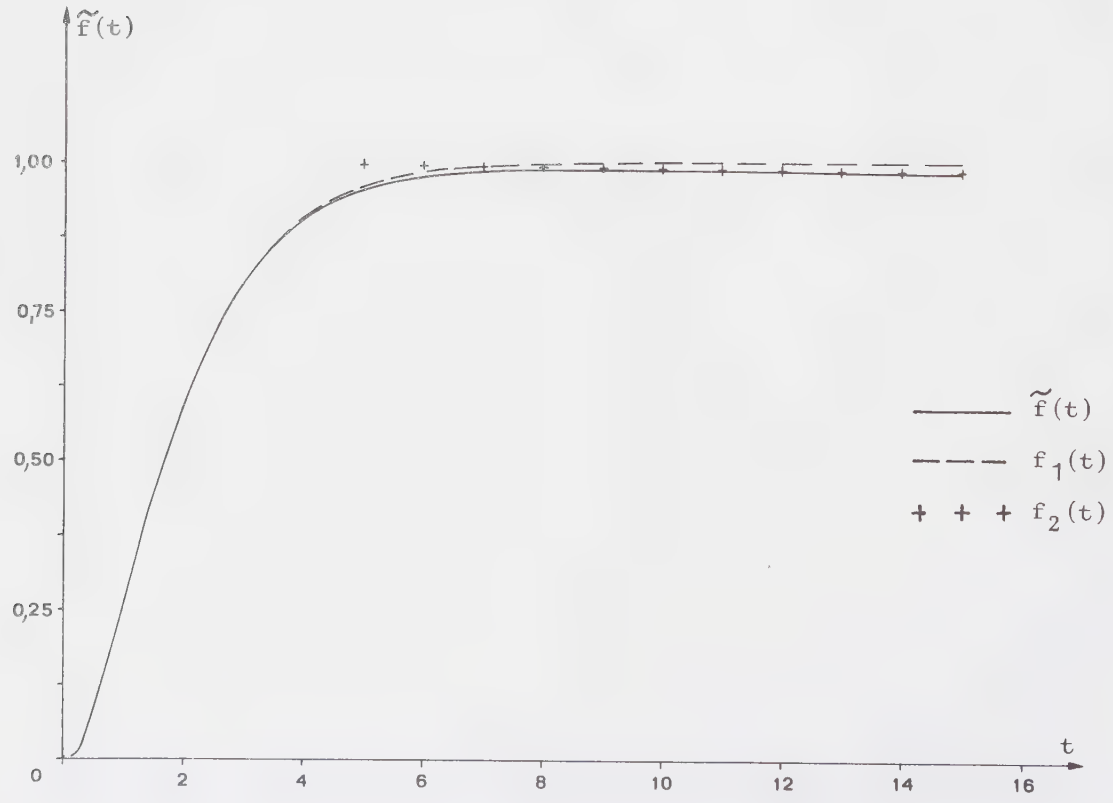
a	0	1.000000
b	0	.001000
	1	1.005300
	2	2.000000
	3	1.000000

ALPHA = .07

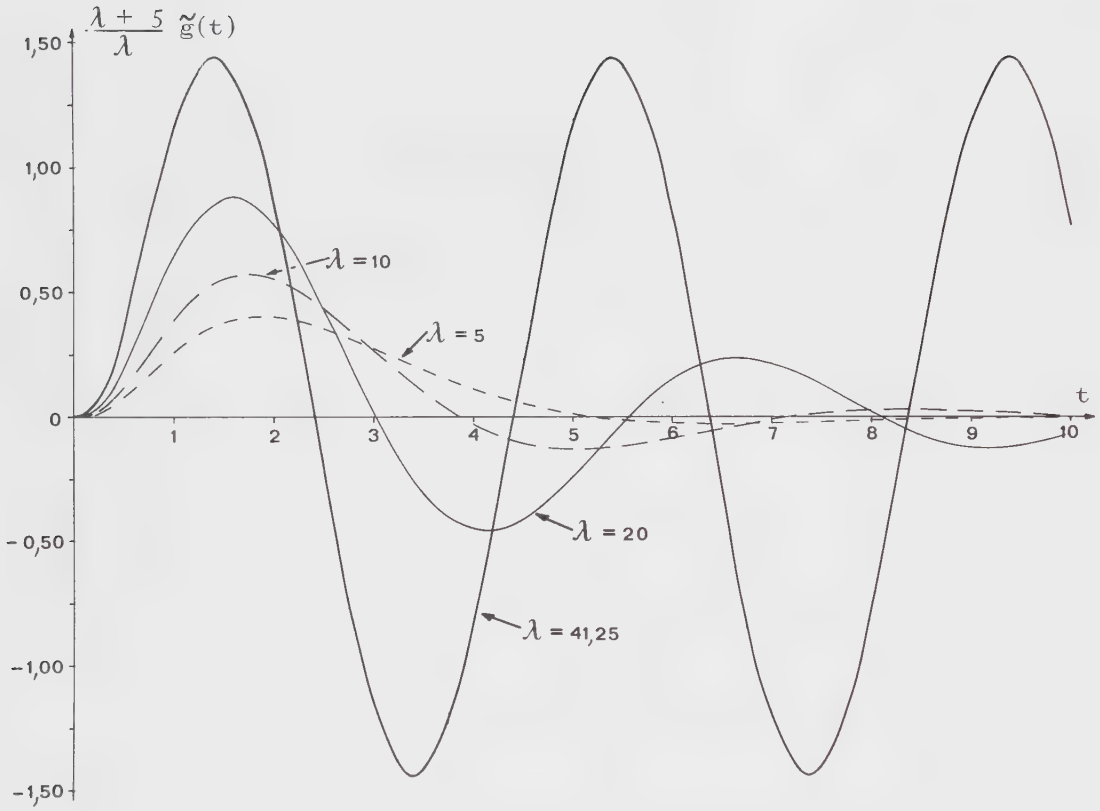
BETA = 2.00

n	f_n
0	.276683111788ex 00
1	-.613787716090ex 00
2	.444501677880ex 00
3	-.174898513370ex 00
4	.988762533300ex-01
5	-.475897311300ex-01
6	.242916866310ex-01
7	-.121480395909ex-01
8	.611584531733ex-02
9	-.307251826567ex-02
10	.154457103712ex-02
11	-.776326362310ex-03
12	.390203972672ex-03
13	-.196139379985ex-03
14	.985729952760ex-04
15	-.495625845218ex-04
16	.248915444040ex-04
17	-.125358526681ex-04
18	.627157038685ex-05
19	-.318710021426ex-05
20	.156107547172ex-05
21	-.832252628260ex-06
22	.363272539665ex-06
23	-.245819149570ex-06
24	.513750230540ex-07
25	-.107770061730ex-06
26	-.383887570218ex-07

t	$\tilde{f}(t)$
.000	-.000000
.500	.090194
1.000	.264136
1.500	.441802
2.000	.593162
2.500	.711248
3.000	.796665
3.500	.861137
4.000	.904645
4.500	.934338
5.000	.954256
5.500	.967405
6.000	.975944
6.500	.981382
7.000	.984757
7.500	.986772
8.000	.987897
8.500	.988443
9.000	.988615
9.500	.988545
10.000	.988321
10.500	.987999
11.000	.987614
11.500	.987190
12.000	.986741
12.500	.986276
13.000	.985801
13.500	.985320
14.000	.984835
14.500	.984348
15.000	.983861



Exemple 11 : $$G(p) = \frac{\lambda}{\lambda + 5 + 20p + 21p^2 + 8p^3 + p^4}$$



Exemple 12 : $$V(p) = \frac{p}{1000 + 64p + 21p^2 + 0,64p^3 + 0,1p^4}$$

DONNEES

a 0 .000000
1 1.000000

b 0 1000.000000
1 64.000000
2 21.000000
3 .640000
4 .100000

ALPHA = 1.60

BETA = 20.00

n	v_n
0	.148767834934ex-01
1	-.168085971157ex-01
2	-.898574724700ex-02
3	.570510821200ex-02
4	.621479683060ex-02
5	.102194673712ex-02
6	-.136690064977ex-02
7	-.892192099360ex-03
8	-.350808034340ex-04
9	.209800649141ex-03
10	.968763364270ex-04
11	-.809155674300ex-05
12	-.266772581132ex-04
13	-.934826087080ex-05
14	.218554934070ex-05
15	.302178272269ex-05
16	.763134433300ex-06
17	-.355437488130ex-06
18	-.314303754028ex-06
19	-.512269282900ex-07
20	.472699084280ex-07
21	.302183862538ex-07
22	.197746872000ex-08
23	-.582426672350ex-08
24	-.294791732500ex-08
25	-.136420222500ex-09

t	$\tilde{v}(t)$
.000	-.000000
.050	.010776
.100	.033965
.150	.053905
.200	.057472
.250	.038802
.300	.000994
.350	-.045368
.400	-.086069
.450	-.108042
.500	-.103545
.550	-.072500
.600	-.022431
.650	.033818
.700	.081789
.750	.109411
.800	.110167
.850	.084606
.900	.039907
.950	-.012266
1.000	-.058956
1.050	-.089232
1.100	-.096793
1.150	-.081235
1.200	-.047760
1.250	-.005519
1.300	.034892
1.350	.064106
1.400	.076139
1.450	.069552
1.500	.047424
1.550	.016229
1.600	-.015992
1.650	-.041671
1.700	-.055439
1.750	-.055177
1.800	-.042190
1.850	-.020590
1.900	.003898
1.950	.025353
2.000	.038949

CHAPITRE IV

APPLICATIONS DE LA TRANSFORMATION DE LAGUERRE EN THEORIE DES SIGNAUX ET SYSTEMES

Nous avons proposé ([82]), en 1970, quelques applications de la transformation de Laguerre en théorie des signaux et systèmes. En effet, la transformation de Laguerre apporte une solution élégante et efficace au problème de l'élaboration d'une représentation discrète à partir d'un modèle continu, problème d'actualité en raison du recours de plus en plus fréquent aux méthodes numériques. La méthode de discrétisation basée sur la transformation de Laguerre que nous proposons présente de nombreux avantages sur les méthodes classiques et sur la méthode dite de la transformation de Poisson. L'application de cette dernière transformation à l'analyse des signaux a récemment été proposée par BOLGIANO ET PIOVOSO ([63]). Leur argumentation repose essentiellement sur les deux points suivants :

a) l'existence de la relation

$$P_n\{f(t)\} = f_n^* \dashv F\left(1-\frac{1}{z}\right)$$

qui entraîne l'élégante relation pour le produit de convolution de deux fonctions

$$P_n\{e(t) \otimes g(t)\} = \sum_{j=0}^{n} e_j^* \, g_{n-j}^*$$

b) la possibilité de reconstruire la fonction originale f(t), à partir de sa transformée de Poisson, à l'aide des relations (III, 45) et (III, 46).

La méthode, séduisante au premier abord, présente cependant des inconvénients inhérents à la relation d'inversion ; en effet, la reconstruction de f(t) à partir de $P_n\{f(t)\}$ exige d'une part le calcul des coefficients $f_n(\beta-1,\beta)$ suivant (III,45) et ne permet, d'autre part, l'introduction que d'un seul paramètre β dans la série d'inversion (III,46). C'est pourquoi la méthode que nous proposons ci-dessous et qui présente les mêmes avantages sans en avoir les inconvénients nous semble particulièrement intéressante.

1 - DESCRIPTION DE LA METHODE

1.1 - Principe

Considérons un système linéaire invariant de réponse impulsive g(t). Si e(t) désigne le signal d'entrée, le signal de sortie s(t) est alors donné par le produit de convolution suivant

$$s(t) = e(t) \otimes g(t) = g(t) \otimes e(t)$$

Les transformées de Laguerre dont nous supposerons l'existence vérifient donc, d'après (III,13), la relation

$$s_n(\alpha,\beta) = \sum_{j=0}^{n} \frac{g_j(\alpha,\beta) - g_{j-1}(\alpha,\beta)}{\beta}\, e_{n-j}(\alpha,\beta)$$

à ce stade il est commode d'introduire $h_n(\alpha,\beta)$ <u>caractéristique du système</u> et défini indifféremment par l'une ou l'autre des relations

(III,61)
$$h_n(\alpha,\beta) = \frac{g_n(\alpha,\beta) - g_{n-1}(\alpha,\beta)}{\beta} = \frac{\nabla g_n(\alpha,\beta)}{\beta}$$

(III,61 bis)
$$h_n(\alpha,\beta) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{G\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right)\right\}$$

où G(p), transformée de Laplace de g(t), désigne la fonction de transfert du système.

La relation entre les transformées de Laguerre de e(t) et s(t) devient

(III,62)
$$s_n(\alpha,\beta) = \sum_{j=0}^{n} h_j(\alpha,\beta)\, e_{n-j}(\alpha,\beta)$$

Cette formule permet de calculer les N premiers éléments du spectre $\{s_n(\alpha,\beta)\}$ à partir des N premiers éléments de chacun des spectres $\{e_n(\alpha,\beta)\}$ et $\{g_n(\alpha,\beta)\}$ [ou $\{h_n(\alpha,\beta)\}$]. Par conséquent, la convolution d'un signal d'entrée e(t) avec la réponse impulsive g(t) d'un système linéaire invariant peut être représentée par la convolution discrète de $e_n(\alpha,\beta)$ et $h_n(\alpha,\beta)$; en définitive, la transformation de Laguerre conduit, comme l'échantillonnage instantané, à une <u>représentation discrète des signaux continus</u>. De plus, en ce qui concerne le filtre discret qui simule le filtre continu, la transformation de Laguerre conduit plus rapidement que l'échantillonnage classique à une fonction de transfert en z de forme convenable. Si G(p) est une fraction rationnelle en p on aura

(III,63)
$$\mathcal{Z}\{h_n(\alpha,\beta)\} = G\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right) = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_m z^{-m}}{d_0 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_m z^{-m}}$$

et, d'après (III,62)

$$Z\{s_n(\alpha,\beta)\} = Z\{h_n(\alpha,\beta)\}\, Z\{e_n(\alpha,\beta)\}$$

relation qui peut donc s'écrire

$$(d_0 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_m z^{-m})\, Z\{s_n(\alpha,\beta)\} = (c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_m z^{-m})\, Z\{e_n(\alpha,\beta)\}$$

l'interprétation à l'aide de la propriété de décalage pour la transformation Z conduit à la relation de récurrence

(III,64) $$d_0 s_n(\alpha,\beta) = c_0 e_n(\alpha,\beta) + \sum_{j=1}^{m} c_j e_{n-j}(\alpha,\beta) - d_j s_{n-j}(\alpha,\beta)$$

qui permet également le calcul des $s_n(\alpha,\beta)$.

En définitive, un système linéaire invariant pourra indifféremment être représenté par la suite discrète $\{h_n(\alpha,\beta)\}$ ou par la transformée Z (III,63) de $h_n(\alpha, \beta)$, le calcul des $s_n(\alpha, \beta)$ correspondant à un signal d'entrée de spectre $\{e_n(\alpha, \beta)\}$ se faisant aisément sur un calculateur numérique à l'aide de (III, 62) ou (III, 64). La reconstruction du signal s(t) à partir des $s_n(\alpha,\beta)$ se fait à l'aide de la relation

(III,28) $$\tilde{s}(t) = e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{N-1} s_n(\alpha,\beta)\, L_n(\beta t)$$

pourvu que les hypothèses h_1, h_2 et h_3 du théorème d'inversion de la transformation de Laguerre soient satisfaites.

Remarque

La relation (III,62) montre que la connaissance des N premiers éléments de deux des trois ensembles $\{e_n(\alpha, \beta)\}$, $\{h_n(\alpha, \beta)\}$ et $\{s_n(\alpha, \beta)\}$ permet de déterminer les N premiers éléments du troisième ensemble. Par exemple, si l'on connaît les premiers éléments de $\{e_n(\alpha, \beta)\}$ et $\{s_n(\alpha, \beta)\}$, en supposant pour simplifier $e_o(\alpha, \beta) \neq 0$, on pourra calculer les premiers $h_n(\alpha, \beta)$ à l'aide de la relation de récurrence

$$e_0(\alpha,\beta)\, h_n(\alpha,\beta) = s_n(\alpha,\beta) - \sum_{j=0}^{n-1} h_j(\alpha,\beta)\, e_{n-j}(\alpha,\beta) \qquad h_0(\alpha,\beta) = \frac{s_0(\alpha,\beta)}{e_0(\alpha,\beta)}$$

Cette dernière relation sera très précieuse pour déterminer les $h_n(\alpha,\beta)$ caractéristiques d'un système dont la fonction de transfert est inconnue mais dont on connait la réponse s(t) à un signal donné e(t).

1.2 - Détermination du spectre d'un signal

La détermination du spectre d'un signal pourra se faire, suivant les circonstances, par l'une des méthodes suivantes.

1.2.1 - Méthodes analytiques

Compte tenu des propriétés de la transformation de Laguerre établies au chapitre premier, les spectres de nombreux signaux f(t) définis par une expression analytique suffisamment simple pourront être déduits de la table de transformées de Laguerre donnée en annexe, table qui pourrait d'ailleurs être avantageusement étendue.

Si la transformée de Laplace F(p) de f(t) est connue, les $f_n(\alpha, \beta)$ pourront également être calculés par inversion de la transformée Z (III, 2) ; dans le cas où F(p) est une fraction rationnelle en p, la mise en oeuvre de la première partie du programme d'inversion numérique décrit au paragraphe 2 du chapitre III fournira rapidement les $f_n(\alpha, \beta)$ désirés.

1.2.2 - Méthodes numériques

Lorsque l'expression analytique de f(t) est trop compliquée ou bien encore lorsque f(t) n'est connue que par son enregistrement graphique ou qu'en un certain nombre de points, $f_n(\alpha, \beta)$ pourra être calculé par intégration numérique, suivant la relation de définition (III, 1).

Une méthode particulière d'intégration numérique, à savoir la méthode de Gauss généralisée pour les polynômes de Laguerre, conduit à la proposition suivante, fort intéressante en pratique :

Proposition

Soient $x_k^{(N)}$ les N racines du polynôme de Laguerre $L_N(x)$, (k= 1,2,...,N), et soit f(t) une fonction dont on connaît les N valeurs $f\left(\frac{x_k^{(N)}}{\beta}\right)$. Les relations

(III,65)
$$\hat{f}_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k^{(N)} e^{\frac{\alpha}{\beta} x_k^{(N)}}}{\left[L_{N-1}(x_k^{(N)})\right]^2} L_n(x_k^{(N)}) f\left(\frac{x_k^{(N)}}{\beta}\right)$$

(III,66)
$$\hat{f}(t) = e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}_n(\alpha,\beta) L_n(\beta t)$$

définissent alors une fonction $\hat{f}(t)$ qui coïncide exactement avec f(t) aux N points

$$t_k = \frac{x_k^{(N)}}{\beta}$$

et si $e^{\alpha t} f(t)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à (N - 1) on a rigoureusement $f(t) = \hat{f}(t)$.

Démonstration

On sait ([83]) qu'une intégrale de la forme

$$I = \int_0^\infty e^{-t} g(t)\,dt$$

peut être approchée par la somme discrète

$$I_N = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k^{(N)}}{\left[L_{N-1}(x_k^{(N)})\right]^2}\, g(x_k^{(N)}) \qquad \text{(III,67)}$$

où les $x_k^{(N)}$ sont les N racines du polynôme de Laguerre $L_N(x)$. On montre que l'on a rigoureusement $I = I_N$ lorsque g(t) est un polynôme en t de degré inférieur ou égal à (2N - 1).

Considérons les deux fonctions f(t) et $\varphi(t) = e^{\alpha t} f(t)$. Si les N valeurs $f\left(\frac{x_k^{(N)}}{\beta}\right)$ sont connues il en est de même des N valeurs $\varphi\left(\frac{x_k^{(N)}}{\beta}\right)$. D'après la théorie de l'interpolation de Lagrange on peut alors construire un polynôme $P_{N-1}(t)$, de degré inférieur ou égal à (N - 1), tel que

$$P_{N-1}\left(\frac{x_k^{(N)}}{\beta}\right) = \varphi\left(\frac{x_k^{(N)}}{\beta}\right) = e^{\frac{\alpha}{\beta} x_k^{(N)}} f\left(\frac{x_k^{(N)}}{\beta}\right) \qquad \text{(III,68)}$$

Soit $\psi(t)$ la fonction

$$\psi(t) = e^{-\alpha t} P_{N-1}(t) \qquad \text{(III,69)}$$

d'après la relation de définition (III,1) $\psi_n(\alpha, \beta)$ peut s'écrire

$$\psi_n(\alpha,\beta) = \int_0^\infty e^{-t} L_n(t)\, P_{N-1}\left(\frac{t}{\beta}\right) dt$$

la relation (III,67) permet d'exprimer rigoureusement cette intégrale pour $n \leqslant N - 1$, le polynôme $L_n(\beta t) P_{N-1}(\frac{t}{\beta})$ étant alors de degré inférieur à (2N - 1). Compte tenu de (III,68) il vient

$$\psi_n(\alpha,\beta) = \hat{f}_n(\alpha,\beta) \qquad n \leqslant N-1$$

$\hat{f}_n(\alpha, \beta)$ étant donné par (III,65). D'autre part, $P_{N-1}(t)$ étant de degré inférieur ou égal à (N - 1)

$$\psi_n(\alpha,\beta) = 0 \qquad n \geqslant N$$

en définitive on a donc

$$\psi(t) = \hat{f}(t)$$

et compte tenu de (III,68) et (III,69)

$$\hat{f}\left(\frac{x_k^{(N)}}{\beta}\right) = \psi\left(\frac{x_k^{(N)}}{\beta}\right) = f\left(\frac{x_k^{(N)}}{\beta}\right)$$

ce qui démontre la première partie de la proposition. Pour démontrer la deuxième partie, il suffit de remarquer que si $\varphi(t) = e^{\alpha t} f(t)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à (N - 1), on a rigoureusement

$$P_{N-1}(t) = \varphi(t)$$

et par conséquent

$$\psi(t) = e^{-\alpha t} P_{N-1}(t) = f(t)$$

d'où

$$f(t) = \hat{f}(t)$$

Un programme de calcul numérique des $\hat{f}_n(\alpha,\beta)$ suivant (III,65), avec N = 15, a été élaboré pour le calculateur WANG 700. Nous avons fait usage des valeurs numériques des racines $x_k^{(15)}$ et des '' nombres de Christoffel ''

$$A_k^{(15)} = \frac{1}{(15)^2} \frac{x_k^{(15)} e^{x_k^{(15)}}}{\left[L_{14}(x_k^{(15)}) \right]^2}$$

calculés par SALZER et ZUCKER ([84]) ce qui permet de simplifier considérablement le programme. Les dix sept valeurs numériques α, β, $f(\frac{x_k^{(15)}}{\beta})$ sont introduites au clavier et imprimées pour contrôle, le calcul puis l'impression des quinze valeurs $\hat{f}_n(\alpha,\beta)$ s'effectuant aussitôt après.

Les nombreux exemples testés ont montré que

- si les quinze échantillons $f(\frac{x_k^{(15)}}{\beta})$ suffisent à représenter correctement le comportement de f(t) sur l'intervalle (0, T), alors $\hat{f}(t)$ constitue une approximation satisfaisante de f(t) sur cet intervalle ;

- si, de plus, f(t) peut être considérée comme pratiquement nulle pour $t > T$ et si $\beta \leqslant 2\alpha$, alors $\hat{f}(t)$ constitue une approximation satisfaisante de f(t) pour tout $t \geqslant 0$.

Remarque

Si pour $t > T$ la fonction f(t) est pratiquement égale à une fonction $F(t)$ on pourra se ramener au cas précédent en appliquant la méthode à la fonction

$$\varphi(t) = f(t) - F(t)$$

qui pourra être considérée comme pratiquement nulle pour $t > T$. On calculera ainsi $\hat{\varphi}_n(\alpha, \beta)$ et on en déduira $\hat{f}_n(\alpha,\beta) = \hat{\varphi}_n(\alpha,\beta) + F_n(\alpha,\beta)$.

1.2.3- Méthodes analogiques

1.2.3.1- Réalisation d'un générateur de fonctions $\beta e^{-(\beta-\alpha)t} L_n(\beta t)$

Considérons une chaîne de N quadripôles en cascade désignés, dans l'ordre, par Q_o, Q_1, Q_2, ..., Q_{N-1} et réalisés à l'aide d'amplificateurs opérationnels différentiels selon les schémas des figures 7 et 8. La chaîne comporte donc un premier quadripôle Q_o (fig. 7) suivi de (N - 1) quadripôles identiques Q_n (fig. 8). Nous supposerons $\beta > \alpha \geqslant 0$.

Lorsque l'entrée du quadripôle Q_o est attaquée par l'échelon unité u(t), on trouve à la sortie du quadripôle Q_n un signal $s_n(t)$ dont la transformée de Laplace s'écrit

$$S_n(p) = \frac{r}{r_1}\,\frac{R_1}{R}\,\frac{RC}{RCp+1}\left(\frac{RCp-\lambda}{RCp+1}\right)^n$$

ou encore, après introduction d'une constante de temps τ (arbitraire)

$$S_n(p) = \frac{r}{r_1}\,\frac{R_1}{R}\,\frac{\tau}{\tau p+\frac{\tau}{RC}}\left(\frac{\tau p-\frac{\lambda\tau}{RC}}{\tau p+\frac{\tau}{RC}}\right)^n$$

Compte tenu de la correspondance dans la transformation de Laplace

$$\beta e^{-\frac{\beta-\alpha}{\tau}t} L_n\left(\frac{\beta}{\tau}t\right) \rightleftharpoons \frac{\beta\tau}{\tau p+\beta-\alpha}\left(\frac{\tau p-\alpha}{\tau p+\beta-\alpha}\right)^n$$

on en déduit que si les relations suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} \dfrac{r}{r_1}\,\dfrac{R_1}{R} = \beta \\ \dfrac{\tau}{RC} = \beta-\alpha \\ \lambda\,\dfrac{\tau}{RC} = \alpha \qquad \left(\lambda = \dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}\right) \end{cases}$$

alors le signal $s_n(t)$ à la sortie du quadripôle Q_n s'écrit

$$s_n(t) = \beta e^{-\frac{\beta-\alpha}{\tau}t} L_n\left(\frac{\beta}{\tau}t\right)$$

Ainsi, il suffit de faire en sorte que les relations précédentes soient vérifiées pour $\tau = 1$ s et lorsque l'entrée du quadripôle Q_o est attaquée par l'échelon unité u(t) on recueille alors à la sortie du quadripôle Q_n le signal

$$s_n(t) = \beta e^{-(\beta-\alpha)t} L_n(\beta t)$$

Un générateur de fonctions de Laguerre ($\beta = 1$, $\alpha = 1/2$) reposant sur ce principe a été construit au Laboratoire, sous la direction du Professeur GENIN, par M. FROSTIN dans le cadre d'une thèse d'Ingénieur C.N.A.M. ; des applications de cet appareil ont été étudiées par A. KERNEUZET ([85]) au cours d'une thèse de 3ème cycle et ont fait l'objet d'une publication ([86]). Notons que le générateur réalisé délivre à la sortie le signal

$$\tilde{f}(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sum_{n=0}^{9} c_n L_n(t)$$

où les c_n sont des coefficients pondérateurs (positifs, négatifs ou éventuellement nuls) ajustables grâce à des potentiomètres à dix tours . Pour engendrer l'approximation $\tilde{f}(t)$ d'un signal $f(t)$ développable en fonctions de Laguerre, il suffit d'afficher les coefficients $c_n = f_n(\frac{1}{2}, 1)$; les diverses propriétés que nous avons établies pour la transformation de Laguerre permettent de systématiser le calcul des coefficients c_n intervenant dans la synthèse de très nombreux signaux.

1.2.3.2- Mesure de $f_n(\alpha,\beta)$ à partir du signal $f(t)$

Un échelon unité $u(t)$ est appliqué à l'instant $t = 0$ à l'entrée du générateur de fonctions $\beta e^{-(\beta-\alpha)t} L_n(\beta t)$ précédemment décrit ; le signal $s_n(t)$ recueilli à la sortie de Q_n est envoyé sur l'une des entrées d'un multiplicateur, le signal $f(t)$ étant envoyé sur l'autre entrée. Le produit $f(t)\ s_n(t)$ attaque l'entrée d'un intégrateur dont la tension de sortie est par conséquent

$$v_s(t) = \int_0^t s_n(u) f(u)\, du = \beta \int_0^t e^{-(\beta-\alpha)u} L_n(\beta u) f(u)\, du$$

lorsque t tend vers l'infini, $v_s(t)$ tend donc vers $f_n(\alpha,\beta)$. En pratique, il suffira d'intégrer sur un intervalle de temps fini suffisamment grand pour mesurer $f_n(\alpha,\beta)$ à la sortie de l'intégrateur.

Cette méthode, testée par KERNEUZET ([85]) et par nous-mêmes dans le cas $\beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ a donné des résultats satisfaisants pour $f_n(\frac{1}{2}, 1)$.

Remarque

Le signal $f(t)$ pourra être un signal ''disponible à l'instant'' mais aussi un signal régénéré à partir d'un enregistrement magnétique ou d'une courbe graphique, l'usage d'un dispositif ''suiveur de courbe'' s'avérant nécessaire dans ce dernier cas. La courbe graphique peut indifféremment être le résultat d'un enregistrement ou d'une construction point par point dans le cas d'un signal $f(t)$ trop compliqué pour être traité analytiquement.

1.2.3.3- Mesure de $f_n(\alpha,\beta)$ à partir du signal $f(T-t)$

Dans la chaîne de quadripôles décrite au § 1.2.3.1, remplaçons le quadripôle Q_o de la figure 7 par le quadripôle Q_o de la figure 9. Appliquons à l'entrée de la chaîne ainsi modifiée le signal $e(t) = f(T-t)$; en introduisant une constante de temps τ comme au § 1.2.3.1, on montre que le signal $s_n(t)$ à la

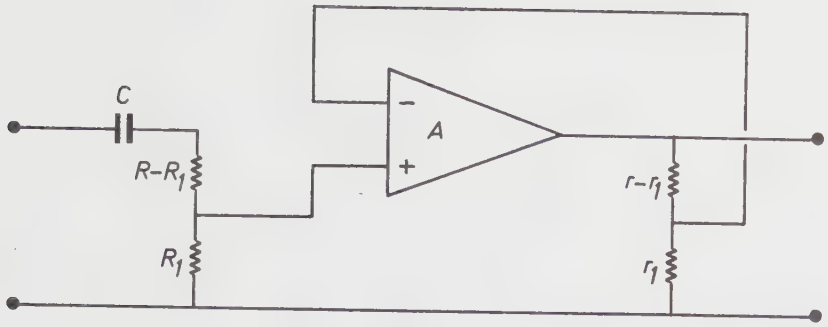


fig. 7

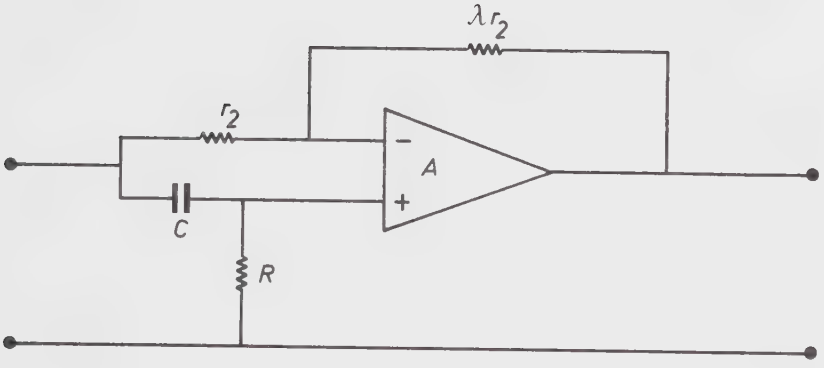


fig. 8

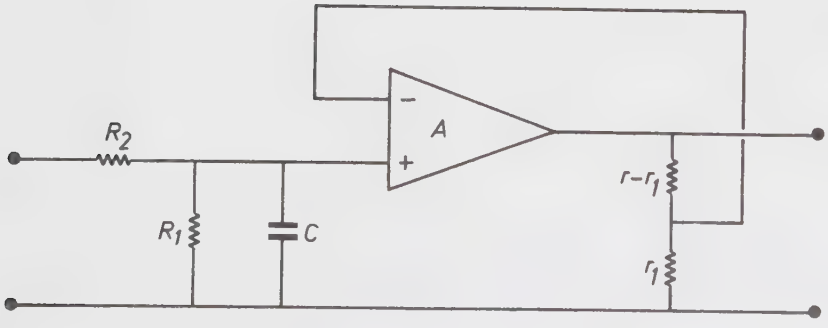


fig. 9

sortie du quadripôle Q_n s'écrit

$$s_n(t) = \beta \int_0^t e^{-\frac{\beta-\alpha}{\tau}u} L_n\left(\frac{\beta}{\tau}u\right) f(T-t+u)\,\frac{du}{\tau}$$

pourvu que les relations suivantes soient vérifiées

$$\begin{cases} \dfrac{r}{r_1}\cdot\dfrac{\tau}{R_2 C} = \beta \\ \dfrac{\tau}{RC} = \beta-\alpha \quad , \quad R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \\ \lambda\,\dfrac{\tau}{RC} = \alpha \qquad \left(\lambda = \dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}\right) \end{cases}$$

Il suffit donc de faire en sorte que les relations précédentes soient vérifiées pour $\tau = 1$ s et lorsque l'entrée du quadripôle Q_o est attaquée par le signal $f(T - t)$ on recueille alors à la sortie du quadripôle Q_n le signal

$$s_n(t) = \beta \int_0^t e^{-(\beta-\alpha)u} L_n(\beta u) f(T-t+u)\,du$$

et à l'instant $t = T$

$$s_n(T) = \beta \int_0^T e^{-(\beta-\alpha)u} L_n(\beta u) f(u)\,du$$

par conséquent

$$\lim_{T\to\infty} s_n(T) = f_n(\alpha,\beta)$$

En pratique, on prendra une valeur finie mais suffisamment grande de T. La mesure à l'instant T des N tensions $s_n(T)$ (utilisation de mémoires par exemple) permettra d'atteindre simultanément les N premiers éléments du spectre $\{f_n(\alpha,\beta)\}$. Cette méthode exige l'enregistrement préalable, magnétique ou graphique, du signal f(t). Dans le cas d'un enregistrement sur bande magnétique, il suffira d'inverser le sens de défilement pour engendrer le signal d'attaque $e(t) = f(T - t)$ tandis que dans le cas d'un enregistrement graphique, on devra faire usage d'un dispositif '' suiveur de courbe ''.

1.3 - Détermination de $h_n(\alpha,\beta)$

Si l'on désire représenter un système par la suite discrète $\{h_n(\alpha,\beta)\}$ et non par la transformée Z (III,63), il convient de calculer $h_n(\alpha,\beta)$. Suivant les circonstances, la détermination des $h_n(\alpha,\beta)$ pourra se faire par l'une des méthodes suivantes.

1.3.1 - Calcul de $h_n(\alpha,\beta)$ à partir de la fonction de transfert symbolique

Si G(p) est connue, on peut calculer $h_n(\alpha,\beta)$ à l'aide de (III,61 bis).

Il est alors commode de remarquer que $h_n(\alpha,\beta)$ est la transformée de Laguerre de la fonction

$$h(t) = e^{-\alpha t} \otimes g(t)$$

dont la transformée de Laplace est

$$H(p) = \frac{G(p)}{p+\alpha}$$

Si G(p) est une fonction rationnelle en p, il en est de même pour H(p). La première partie du programme d'inversion numérique de fractions rationnelles en p, signalé au chapitre II, peut alors être mise en oeuvre pour calculer $h_n(\alpha,\beta)$. Cette méthode est généralement préférable à celle qui consiste à calculer $g_n(\alpha,\beta)$ puis $h_n(\alpha,\beta)$ à l'aide de (III,61).

1.3.2 - Calcul de $h_n(\alpha,\beta)$ à partir des spectres des signaux d'entrée et de sortie

Dans certains cas, par exemple si G(p) n'est pas connue (problème d'identification des paramètres d'un système), on fera usage de la relation (III,62 bis) pour calculer les $h_n(\alpha,\beta)$ de proche en proche ; les $e_n(\alpha,\beta)$ sont alors déterminés analytiquement ou expérimentalement, les $s_n(\alpha,\beta)$ étant déterminés expérimentalement (méthodes numériques ou analogiques) comme indiqué au paragraphe 1.2 . En particulier, si $e(t) = e^{-\alpha t}$, on aura $h_n(\alpha,\beta) = s_n(\alpha,\beta)$.

Enfin, il convient de signaler un cas particulier très intéressant du point de vue expérimental. Soir r(t) la réponse indicielle du système considéré. Les transformées de Laplace R(p) et G(p) vérifient la relation

$$G(p) = pR(p)$$

et par conséquent, d'après (III,61bis)

$$h_n(\alpha,\beta) \dashv \left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right) R\left(\frac{\beta z}{z-1} - \alpha\right)$$

l'interprétation de cette correspondance conduit à la relation

(III,70) $$h_n(\alpha,\beta) = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) r_n(\alpha,\beta) + \frac{\alpha}{\beta}\, r_{n-1}(\alpha,\beta)$$

Ainsi, la détermination expérimentale des N premiers éléments du spectre de la réponse indicielle r(t) fournira les N premiers éléments de $\{h_n(\alpha,\beta)\}$, d'où l'importance pratique de cette relation.

1.2.3 - Calcul de $h_n(\alpha,\beta)$ à partir de la partie réelle X(ω) de la fonction de transfert harmonique G(jω)

Soient X(ω) et Y(ω) les parties réelles et imaginaires de la fonction de transfert harmonique d'un système

$$G(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

et supposons que l'intégrale

$$I(t) = \int_0^\infty X(\omega) \cos \omega t \, d\omega$$

existe $\forall t \geqslant 0$. On sait que la réponse impulsive g(t) est alors donnée par la relation

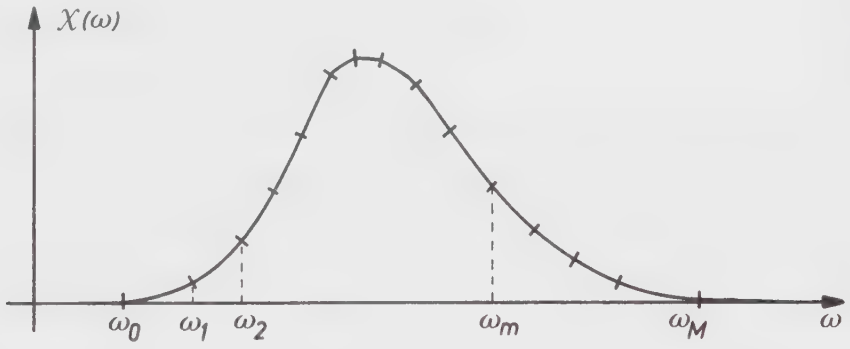
$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(\omega) \cos \omega t \, d\omega$$

supposons que la contribution des intervalles $\omega < \omega_o$ et $\omega > \omega_M$ soit négligeable; dans ce cas

(III,71)
$$g(t) \simeq \frac{2}{\pi} \int_{\omega_o}^{\omega_M} X(\omega) \cos \omega t \, d\omega$$

Divisons l'intervalle (ω_o, ω_M) en M intervalles (ω_m, ω_{m+1}) tels que l'approximation linéaire de $X(\omega)$ sur chacun de ces intervalles, comme indiqué sur la figure 10, soit justifiée.

fig. 10



Il est alors possible de calculer une valeur approchée de l'intégrale (III,71) et finalement on obtient pour g(t) l'approximation $\bar{g}(t)$ suivante

(III,72)
$$\bar{g}(t) = \frac{2}{\pi} \left\{ X(\omega_M) \frac{\sin \omega_M t}{t} - X(\omega_o) \frac{\sin \omega_o t}{t} + \sum_{m=0}^{M-1} \frac{X(\omega_{m+1}) - X(\omega_m)}{\omega_{m+1} - \omega_m} \quad \frac{\cos \omega_{m+1} t - \cos \omega_m t}{t^2} \right\}$$

en faisant usage des transformées de Laguerre de t sin ωt et de cos ωt (données en annexe) on peut calculer la transformée $\overline{\psi}_n(\alpha,\beta)$ de $\overline{\psi}(t) = t^2 \bar{g}(t)$. La transformée $\bar{g}_n(\alpha,\beta)$ de $\bar{g}(t) = t^{-2}\, \overline{\psi}(t)$ est ensuite calculée à l'aide de la relation de récurrence (III,17) dans laquelle on pose évidemment $f_n(\alpha,\beta) = \overline{\psi}_n(\alpha,\beta)$. Finalement on obtient ainsi une valeur approchée $\bar{h}_n(\alpha,\beta)$ de $h_n(\alpha,\beta)$ à l'aide de (III,61) soit

$$\bar{h}_n(\alpha,\beta) = \frac{\bar{g}_n(\alpha,\beta) - \bar{g}_{n-1}(\alpha,\beta)}{\beta}$$

Un tel programme de calcul a été élaboré pour le calculateur WANG 700. Les données ω_o, ω_1, ... ω_M, $X(\omega_o)$, $X(\omega_1)$,.... $X(\omega_M)$, α, β et M ($M \leqslant 20$), sont introduites au clavier et imprimées pour contrôle ; le calcul puis l'impression des $\bar{g}_n(\alpha,\beta)$ commencent alors pour s'arrêter lorsque $\bar{g}_{20}(\alpha,\beta)$ est imprimé.

Il est ainsi possible, à partir de la courbe expérimentale $X(\omega)$, ou des courbes de gain $A(\omega) = |G(j\omega)|$ et de phase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$, de déterminer une suite discrète $\{\bar{h}_n(\alpha,\beta)\}$ représentant correctement le système si les hypothèses faites précédemment sont vérifiées.

Si $X(\omega)$ tend vers une limite non nulle $X(\infty)$ lorsque ω tend vers l'infini, un artifice de calcul permet d'exploiter les résultats précédents. On raisonne alors sur un système fictif dont la fonction de transfert $G^*(j\omega)$ aurait pour partie réelle

$$X^*(\omega) = X(\omega) - X(\infty)$$

et dont la réponse impulsive serait par conséquent

$$g^*(t) = g(t) - X(\infty)\,\delta(t)$$

$\delta(t)$ désignant l'impulsion de Dirac.

L'application de la méthode précédente permet de calculer $\bar{g}_n^*(\alpha,\beta)$ et, compte tenu du fait que la transformée de Laguerre de $\delta(t)$ est égale à β, $\forall n$, il vient

$$\bar{g}_n(\alpha,\beta) = \bar{g}_n^*(\alpha,\beta) + \beta X(\infty)$$

d'où finalement

$$\begin{cases} \bar{h}_o(\alpha,\beta) = \dfrac{\bar{g}_o^*(\alpha,\beta)}{\beta} + X(\infty) \\ \bar{h}_n(\alpha,\beta) = \dfrac{\bar{g}_n^*(\alpha,\beta) - \bar{g}_{n-1}^*(\alpha,\beta)}{\beta} \qquad n \geqslant 1 \end{cases}$$

Remarques

1°) Cette méthode de détermination d'une valeur approchée $\bar{h}_n(\alpha,\beta)$ de $h_n(\alpha,\beta)$ donne des résultats très satisfaisants en pratique. Cependant, nous avons l'intention de la perfectionner

- d'une part en remplaçant l'approximation linéaire de $X(\omega)$ par une approximation parabolique
- d'autre part en introduisant une expression asymptotique de la forme

$$X(\omega) \sim \frac{B}{\omega^l}$$

pour les grandes valeurs de ω, la constante B et l'entier ℓ se déduisant de l'asymptote à la courbe $X(\omega)$ [échelles logarithmiques].

2°) Les méthodes de détermination expérimentale de $h_n(\alpha,\beta)$ indiquées au § 1.3.2 posent des problèmes, d'enregistrement entre autres, lorsque les variations du signal sont trop rapides ; par contre, la présente méthode devient alors particulièrement commode à mettre en oeuvre, les mesures de gain et de phase ne présentant pas de difficultés particulières à des fréquences relativement élevées.

3°) Enfin, il convient de noter que le programme de calcul précédent pourra servir à déterminer une valeur approchée $\bar{f}_n(\alpha,\beta)$ de la transformée de Laguerre de certains signaux f(t) dont la transformée de Laplace F(p) est connue : il suffira pour cela de calculer la partie réelle $X(\omega)$ de $F(j\omega)$.

2 - RESULTATS NUMERIQUES

Exemple 1

Considérons la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{17}{(p+1)^2+16}$$

correspondant tout simplement à un filtre RLC et désignons par s(t) la réponse à un signal e(t). D'après (III,61 bis)

$$h_n(2,9) \dashv \frac{17(1-2z^{-1}+z^{-2})}{80-16z^{-1}+17z^{-2}}$$

et la relation de récurrence (III,64) s'écrit

$$80\,s_n(2,9) = 16 s_{n-1}(2,9) - 17 s_{n-2}(2,9) + 17\left[e_n(2,9) - 2e_{n-1}(2,9) + e_{n-2}(2,9)\right]$$

relation qui permet de calculer la transformée de Laguerre du signal de sortie lorsque la transformée de Laguerre du signal d'entrée est connue.

Considérons, par exemple, le signal d'entrée

$$e(t) = 10\,t\,e^{-3t}$$

pour lequel on déduit de la table de transformées de Laguerre donnée en annexe

$$e_n(2,9) = -0,9\,(9n-1)\,10^{-n}$$

Les quinze premiers éléments du spectre $\{s_n(2,9)\}$ calculés à l'aide de la relation de récurrence précédente sont donnés page 141 où l'on peut voir

également le graphe de la réponse calculée

$$\tilde{s}(t) = e^{-2t} \sum_{n=0}^{14} s_n(2,9) L_n(9t)$$

Sur ce graphe, nous avons également représenté, par des croix, quelques points correspondant à la réponse exacte qui peut être calculée relativement facilement pour l'exemple choisi et qui s'écrit

$$s(t) = 1,7\left[(5t+1)e^{-3t} - (\cos 4t + 0,75 \sin 4t)e^{-t}\right]$$

La précision obtenue est excellente malgré la prise en considération de quinze termes seulement pour le calcul de $\tilde{s}(t)$.

Remarques

a) Pour le calcul des $e_n(2,9)$ on aurait également pu appliquer à la transformée de Laplace

$$E(p) = \frac{10}{(p+3)^2}$$

la première partie du programme d'inversion numérique décrit au paragraphe 2 du chapitre III.

b) L'application de ce même programme à la transformée de Laplace

$$H(p) = \frac{G(p)}{p+2} = \frac{17}{34 + 21p + 4p^2 + p^3}$$

aurait également permis de calculer explicitement les $h_n(2,9)$, les $s_n(2,9)$ se calculant alors suivant (III,62).

Exemple 2

A titre de vérification expérimentale nous avons étudié un système linéaire invariant de fonction de transfert inconnue (" boite noire "). Un échelon unité u(t) étant appliqué à l'entrée, la réponse indicielle r(t) est enregistrée à l'aide d'un enregistreur XY HEWLETT PACKARD. Cet enregistrement est reproduit à l'échelle 0,4 page 142 .

Les $x_k^{(15)}$ désignant les racines de $L_{15}(x) = 0$, les valeurs numériques $r(x_k^{(15)})$ lues sur l'enregistrement ainsi que les valeurs numériques $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$ sont introduites au clavier du calculateur WANG 700 qui, fonctionnant suivant le programme décrit au paragraphe 1.2.2 fournit les quinze premiers $\hat{r}_n(\frac{1}{2}, 1)$. Une valeur approchée $\hat{h}_n(\frac{1}{2}, 1)$ de $h_n(\frac{1}{2}, 1)$ est alors calculée à l'aide de (III,70) qui s'écrit dans le cas présent

$$\hat{h}_n(\tfrac{1}{2}, 1) = \tfrac{1}{2}\left[\hat{r}_n(\tfrac{1}{2}, 1) + \hat{r}_{n-1}(\tfrac{1}{2}, 1)\right]$$

Le système considéré peut être représenté, avec une certaine approximation, par les seize termes $\hat{h}_n(\frac{1}{2}, 1)$ ainsi calculés et reproduits page 142 .

Théoriquement, il est maintenant possible de calculer approximativement la réponse du système à tout signal e(t) de spectre connu $\{e_n(\frac{1}{2}, 1)\}$. Considérons par exemple le signal e(t) défini par son enregistrement reproduit page 143 et

pour lequel la mise en oeuvre du programme de calcul décrit au paragraphe 1.2.2 fournit les quinze premiers $\hat{e}_n(\frac{1}{2}, 1)$. Une valeur approchée de la transformée de Laguerre du signal de sortie s(t) est donnée par la relation déduite de (III,62) à savoir

$$\hat{s}_n(\tfrac{1}{2},1) = \sum_{j=0}^{n} \hat{h}_j(\tfrac{1}{2},1)\, \hat{e}_{n-j}(\tfrac{1}{2},1)$$

Pour le signal de sortie on obtient donc finalement l'approximation suivante, en limitant le nombre de termes à N = 21

$$\hat{s}(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sum_{n=0}^{20} \hat{s}_n(\tfrac{1}{2},1) L_n(t)$$

Afin de nous rendre compte de la précision de la méthode, nous avons, d'une part enregistré la réponse s(t) au signal e(t), et d'autre part calculé $\hat{s}(t)$. L'examen de l'enregistrement reproduit page 143 et sur lequel nous avons représenté par des croix des valeurs calculées $\hat{s}(t)$ révèle un accord excellent entre réponse réelle et réponse calculée. Il est donc raisonnable de penser que la représentation discrète ainsi élaborée pour le système est satisfaisante.

Exemple 3

Nous nous proposons d'élaborer une représentation discrète pour un système de fonction de transfert inconnue (" boite noire ") à partir de la courbe expérimentale X(ω) représentant les variations de la partie réelle de la fonction de transfert avec la pulsation ω. Un appareil construit au Laboratoire par M. JOUSSET ([92]) dans le cadre d'une thèse d'Ingénieur C.N.A.M. et permettant de relever point par point de telles courbes avec une bonne précision a été utilisé. La courbe ainsi relevée est reproduite page 144 .

La mise en oeuvre du programme de calcul décrit au paragraphe 1.3.3 fournit alors les $\bar{g}_n(\frac{1}{2}, 1)$ puis les $\bar{h}_n(\frac{1}{2}, 1)$, les données et résultats numériques figurant page 144 .

Afin de tester la représentation discrète ainsi élaborée, nous avons fait usage de cette représentation discrète pour calculer une valeur approchée $\bar{r}(t)$ de la réponse indicielle. Compte tenu de la transformée de Laguerre du signal échelon unité u(t)

$$\mathcal{L}_n^{\frac{1}{2},1}\left\{u(t)\right\} = 2\times(-1)^n$$

il vient d'après (III,62)

$$\bar{r}_n(\tfrac{1}{2},1) = 2\sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, \bar{h}_{n-j}(\tfrac{1}{2},1)$$

et par conséquent

$$\bar{r}(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sum_{n=0}^{20} \bar{r}_n(\tfrac{1}{2},1) L_n(t)$$

Sur l'enregistrement de la réponse réelle r(t), page 145 , nous avons représenté par des croix des valeurs calculées $\bar{r}(t)$. La représentation discrète élaborée est encore satisfaisante mais pourrait probablement être améliorée compte tenu des remarques faites au paragraphe 1.3.3.

Exemple 4

Les dix premiers éléments du spectre $\{r_n(\frac{1}{2}, 1)\}$ de la réponse indicielle r(t) d'un système linéaire invariant de fonction de transfert inconnue (" boite noire ") mesurés suivant la méthode décrite au paragraphe 1.2.3.2 sont donnés page 146 .

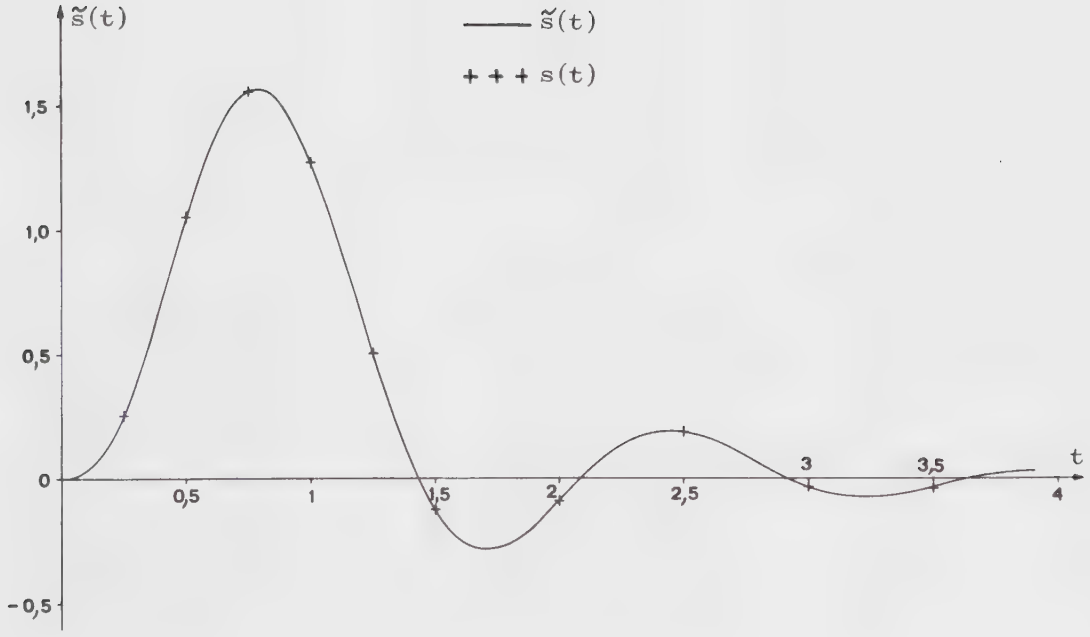
Afin de vérifier si ces valeurs mesurées $r_n(\frac{1}{2}, 1)$ permettaient de représenter de façon satisfaisante la réponse indicielle r(t) nous avons, sur l'enregistrement de la réponse réelle r(t) reproduit page 146 , représenté par des croix des valeurs $\tilde{r}(t)$ calculées à l'aide de la relation

$$\tilde{r}(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sum_{n=0}^{9} r_n(\tfrac{1}{2}, 1) L_n(t)$$

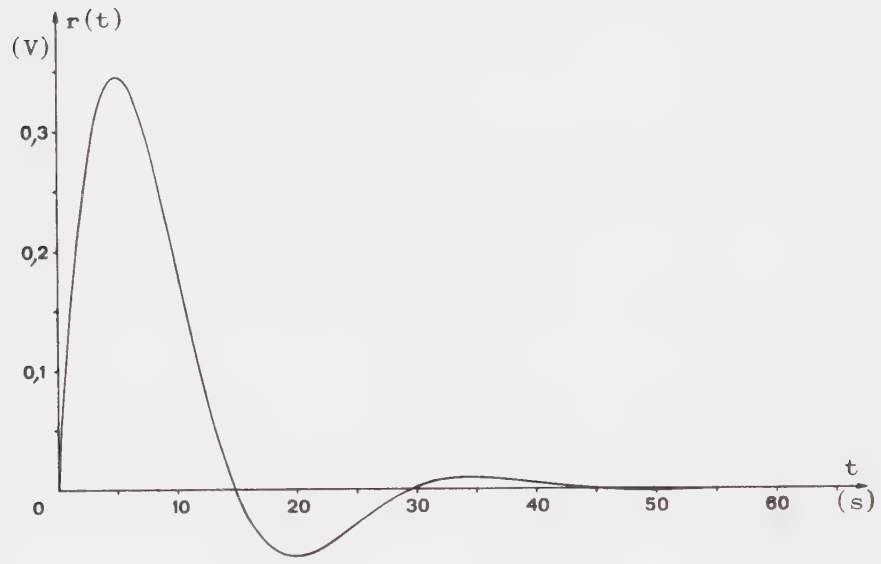
Compte tenu de la prise en considération de dix termes seulement pour le calcul de $\tilde{r}(t)$, les résultats sont satisfaisants et la relation (III,70) permettrait de calculer avec une précision convenable les dix premiers termes $h_n(\frac{1}{2}, 1)$ et par conséquent d'élaborer une représentation discrète correcte du système.

Exemple 1

n	$s_n(2,9)$
0	.191250000000ex 00
1	-.497250000000ex 00
2	.324646675000ex 00
3	.776475000000ex-01
4	-.766948359300ex-01
5	-.355569609200ex-01
6	.667504922500ex-02
7	.922580082200ex-02
8	-.618829410000ex-03
9	-.196264976103ex-02
10	-.391321773170ex-03
11	.338786701649ex-03
12	.150911944714ex-03
13	-.418098482239ex-04
14	-.404306775000ex-04

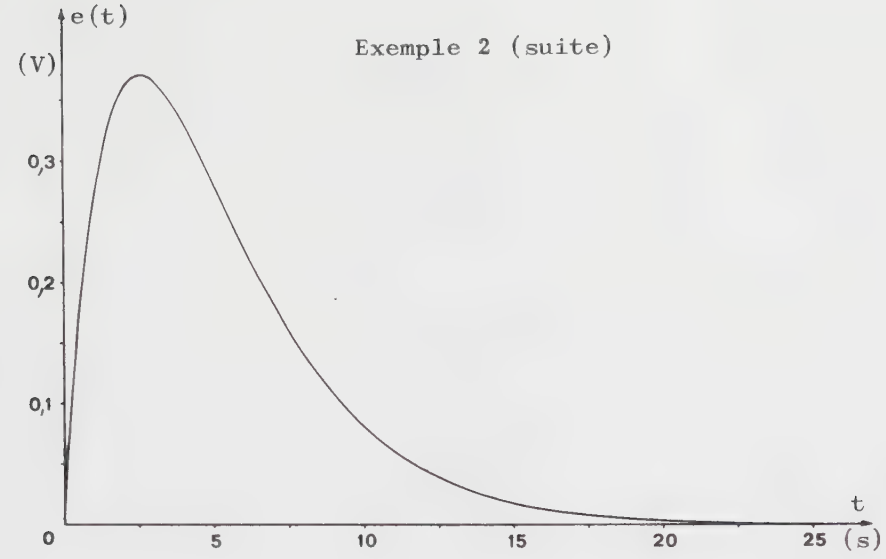


Exemple 2

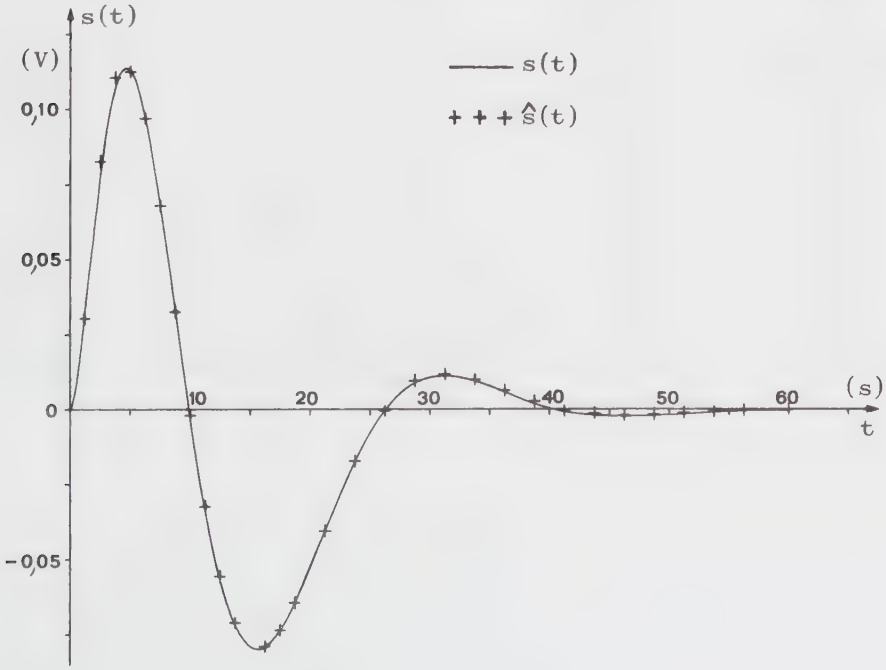


n	$\hat{r}_n(\frac{1}{2}, 1)$	$\hat{h}_n(\frac{1}{2}, 1)$
0	.3662927839999ex 00	.1831463919999ex 00
1	-.6801403096220ex 00	-.1569237628120ex 00
2	.4329499257090ex 00	-.1235951919570ex 00
3	-.9535736690000ex-01	.1687962694040ex 00
4	-.1010414076260ex 00	-.9819939726300ex-01
5	.1434584500160ex 00	.2120852119500ex-01
6	-.6574829031170ex-01	.3885507985220ex-01
7	.7338497592930ex-02	-.2920489635940ex-01
8	.2808046926410ex-01	.1770948342840ex-01
9	-.3095671533250ex-01	-.1438123034200ex-02
10	.6721870984180ex-02	-.1111742217420ex-01
11	-.5561390746360ex-02	.1560240118910ex-02
12	-.9472364624630ex-02	-.7516877685590ex-02
13	.1381508792700ex-03	-.4607103872780ex-02
14	-.5532983500570ex-02	-.2097413313600ex-02
15	.0000000000000ex 00	-.2706491753280ex-02

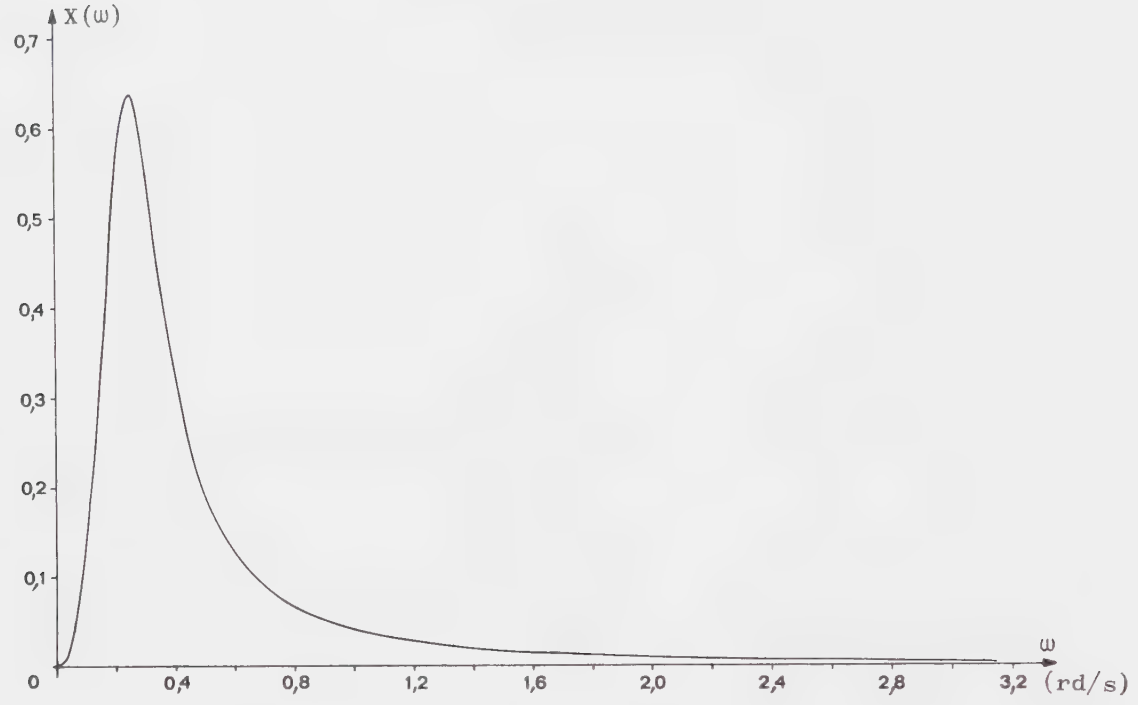
Exemple 2 (suite)



n	$\hat{h}_n(\frac{1}{2}, 1)$	$\hat{e}_n(\frac{1}{2}, 1)$	$\hat{s}_n(\frac{1}{2}, 1)$
0	.183146391999ex 00	.498089435613ex 00	.912232830253ex-01
1	-.156923762812ex 00	-.619694444246ex 00	-.191656870058ex 00
2	-.123595191957ex 00	.150313462657ex 00	.632126929330ex-01
3	.108796269404ex 00	-.293248370976ex-01	.131708400080ex-00
4	-.981993972630ex-01	.413826708239ex-02	-.166732541523ex 00
5	.212085211950ex-01	-.368206958560ex-03	.996972932877ex-01
6	.388550798522ex-01	-.109720405543ex-02	-.141547506405ex-01
7	-.292048963594ex-01	-.717521901000ex-04	-.316542507370ex-01
8	.177094834284ex-01	-.483327830520ex-03	.317273451791ex-01
9	-.143812303420ex-02	.134997660050ex-03	-.171719317133ex-01
10	-.111174221742ex-01	.292744299470ex-03	-.787086554840ex-03
11	.158024011691ex-02	-.470213943960ex-03	.655929467093ex-02
12	-.751687768559ex-02	-.695614786360ex-03	-.633192629939ex-02
13	-.466710387278ex-02	-.129239997520ex-03	.308337545159ex-02
14	-.269741331305ex-02	.220678041920ex-03	.333320755370ex-03
15	-.276649175328ex-02	.000000000000ex 00	-.241816017720ex-03
16	.000000000000ex 00	.000000000000ex 00	.143377404713ex-02
17	.000000000000ex 00	.000000000000ex 00	-.341755042746ex-03
18	.000000000000ex 00	.000000000000ex 00	.518842474511ex-04
19	.000000000000ex 00	.000000000000ex 00	.429323272210ex-05
20	.000000000000ex 00	.000000000000ex 00	.584429885957ex-05



Exemple 3



DONNEES

n	ω_n	$X(\omega_n)$	$\overline{g}_n(\frac{1}{2}, 1)$	$\overline{h}_n(\frac{1}{2}, 1)$
0	.000	.000	.183026182178ex 00	.183026182178ex 00
1	.031	.008	.243856805826ex-01	-.158640301590ex 00
2	.062	.042	-.100173267019ex 00	-.124558947601ex 00
3	.125	.200	.729719591437ex-01	.173145226162ex 00
4	.186	.483	-.226602176919ex-01	-.958321768356ex-01
5	.219	.597	-.137692131575ex-01	.909100453440ex-02
6	.245	.636	.183656031244ex-01	.321348162619ex-01
7	.257	.636	-.118466598295ex-01	-.302122029539ex-01
8	.282	.596	-.129676626220ex-03	.117169832033ex-01
9	.345	.443	.315158453218ex-02	.328126116840ex-02
10	.376	.369	-.451738438701ex-02	-.700689089219ex-02
11	.439	.262	.141850217606ex-02	.593588636307ex-02
12	.502	.190	.193318763212ex-03	-.122518339285ex-02
13	.565	.147	-.138921955678ex-02	-.158253833999ex-02
14	.628	.116	.104317028492ex-02	.243438984170ex-02
15	.753	.076	.137695414937ex-03	-.907474869990ex-03
16	.942	.046	.183416252799ex-03	.457228537620ex-04
17	1.193	.027	.131565538912ex-03	-.518527138670ex-04
18	1.570	.015	.863415476117ex-03	.751849937200ex-03
19	2.199	.007	-.242801837790ex-03	-.112621731390ex-02
20	3.141	.002	.864046872555ex-03	.906648710345ex-03

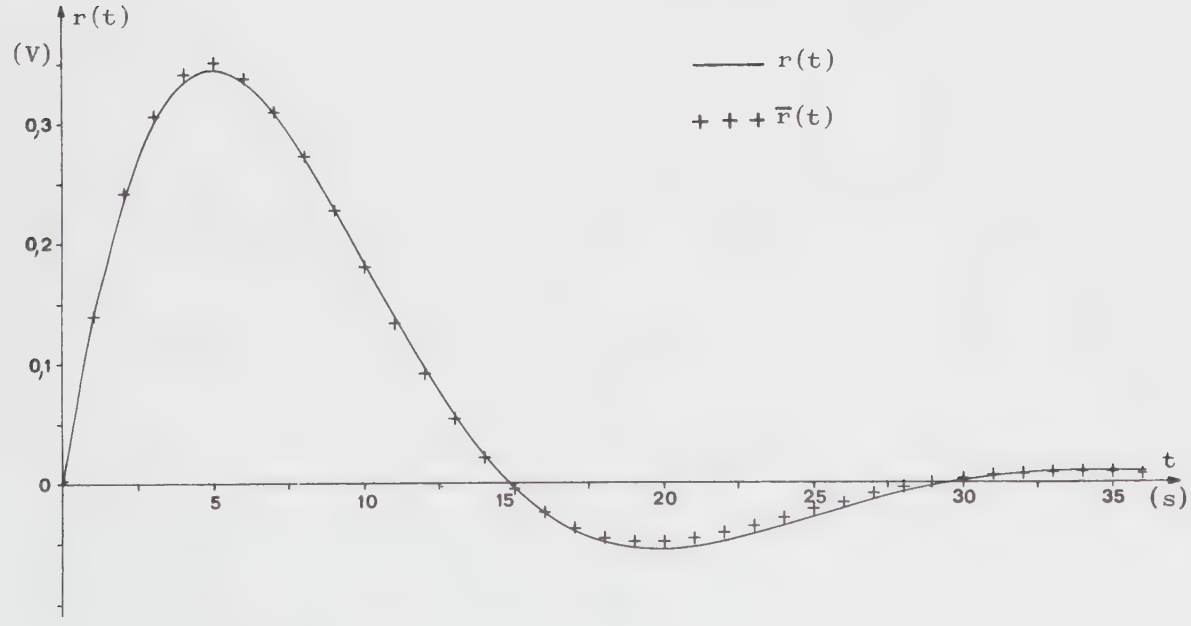
ALPHA = .50

BETA = 1.00

N = 20.00

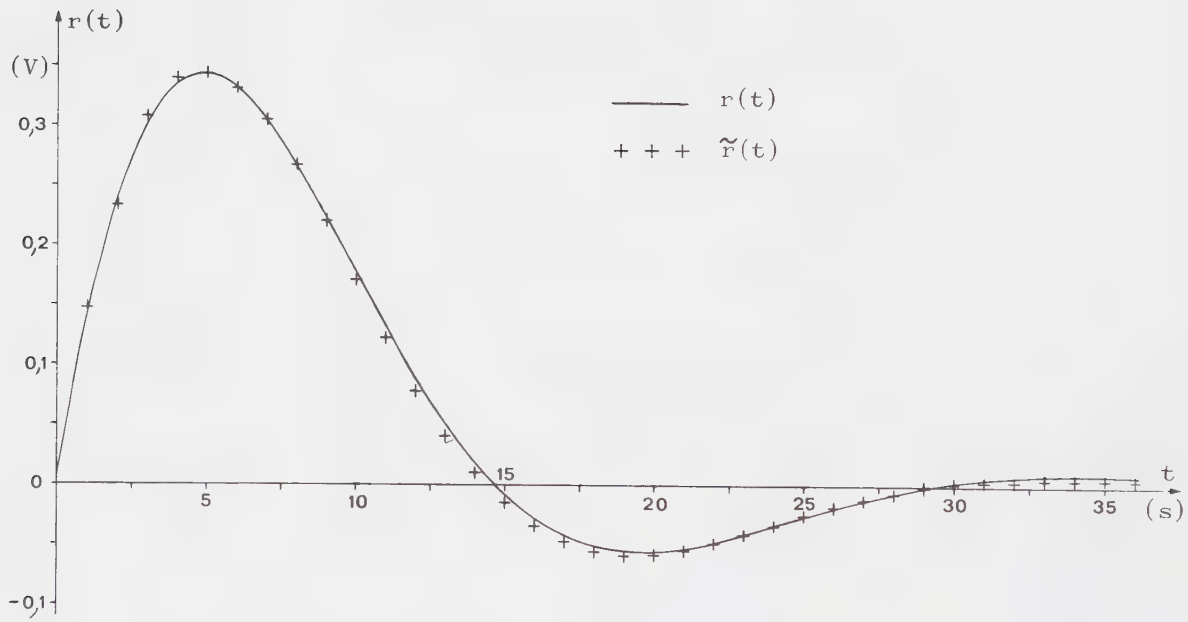
Exemple 3 (suite)

n	$\overline{h}_n(\frac{1}{2}, 1)$	$e_n(\frac{1}{2}, 1)$	$\overline{r}_n(\frac{1}{2}, 1)$
0	.1830261621786ex 00	.2000000000000ex 01	.3000523043566ex 00
1	-.1586405015996ex 00	-.2000000000000ex 01	-.6833333675486ex 00
2	-.1245356947001ex 00	.2000000000000ex 01	.4342154723406ex 00
3	.1731452261626ex 00	-.2000000000000ex 01	-.8792500200220ex-01
4	-.9583217663566ex-01	.2000000000000ex 01	-.1037393336496ex-00
5	.9091004533406ex-02	-.2000000000000ex 01	.1219421342717ex-00
6	.3213481626819ex-01	.2000000000000ex 01	-.5763171015406ex-01
7	-.3021226295396ex-01	-.2000000000000ex 01	-.2772615753606ex-02
8	.1171698320336ex-01	.2000000000000ex 01	.2620078216046ex-01
9	.3261201166406ex-02	-.2000000000000ex 01	-.1964425982306ex-01
10	-.7066966929196ex-02	.2000000000000ex 01	.4306321965306ex-02
11	.5935666566076ex-02	-.2000000000000ex 01	.7565451160806ex-02
12	-.1225163392656ex-02	.2000000000000ex 01	-.1001561794656ex-01
13	-.1562536339996ex-02	-.2000000000000ex 01	.6850741266606ex-02
14	.2434386984176ex-02	.2000000000000ex 01	-.1981961583206ex-02
15	-.9074748699906ex-03	-.2000000000000ex 01	.1670118432206ex-03
16	.4572263786206ex-04	.2000000000000ex 01	-.7556616749606ex-04
17	-.5165271368706ex-04	-.2000000000000ex 01	-.2813926027806ex-04
18	.7518499372056ex-03	.2000000000000ex 01	.1531839134686ex-02
19	-.1126217313906ex-02	-.2000000000000ex 01	-.3764273762486ex-02
20	.9066867103456ex-03	.2000000000000ex 01	.5597971186176ex-02



Exemple 4

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r_n(\frac{1}{2}, 1) \times 10^3$	356	- 682	409	- 76,7	- 137	124	- 74	- 11,8	13,9	- 29,5



CHAPITRE V

INVERSION NUMERIQUE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE A L'AIDE D'UNE CERTAINE CLASSE DE FONCTIONS $\varphi_n(t)$

1 - GENERALITES

Soit une suite de fonctions $\varphi_n(t)$ telles que la série

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n(t) \tag{III,73}$$

converge uniformément sur tout segment $(0,t)$, $t > 0$, et que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left| f_n \varphi_n(t) e^{-pt} \right| \right] dt$$

converge. Le problème consiste à calculer les coefficients f_n en utilisant uniquement la transformée de Laplace $F(p)$ de la fonction $f(t)$. L'utilisation de la transformation Z apporte une solution chaque fois que les fonctions $\varphi_n(t)$ ont des transformées de Laplace de la forme

$$L\{\varphi_n(t)\} = \gamma_n \frac{A(p)}{[B(p)]^n} \tag{III,74}$$

où $A(p)$ et $B(p)$ sont indépendants de n.

En effet, de (III,73) on déduit alors

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n f_n \frac{A(p)}{[B(p)]^n} \tag{III,75}$$

Posons $B(p) = z$ et supposons que cette équation en p soit résoluble sous la forme

$$p = B^{-1}(z)$$

il vient, après substitution dans (III,75)

$$F[B^{-1}(z)] = A[B^{-1}(z)] \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \gamma_n f_n$$

relation équivalente à

(III,76) $$\gamma_n f_n \dashv \frac{F[B^{-1}(z)]}{A[B^{-1}(z)]}$$

cette dernière relation constitue une généralisation évidente de (III,2).

Soit un système linéaire invariant de réponse impulsive g(t). Si e(t) désigne le signal d'entrée, le signal de sortie s(t) est alors donné par le produit de convolution suivant

$$s(t) = e(t) \otimes g(t) = g(t) \otimes e(t)$$

Considérons les développements en série

$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \varphi_n(t)$$

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \varphi_n(t)$$

et introduisons, comme au chapitre IV, des coefficients h_n caractéristiques du système considéré et ainsi définis

$$h_n \dashv G[B^{-1}(z)]$$

G(p) désignant la fonction de transfert du système. D'après (III,76)

$$\gamma_n s_n \dashv \mathcal{Z}\{h_n\}\ \mathcal{Z}\{\gamma_n e_n\}$$

et par conséquent

$$s_n = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{j=0}^{n} h_j \gamma_{n-j} e_{n-j}$$

Cette relation constitue une généralisation évidente de (III,62) et permet, les coefficients h_n étant calculés une fois pour toutes, de calculer les réponses s(t) à divers signaux e(t). On a encore une méthode de discrétisation particulièrement bien adaptée au traitement sur calculateur numérique.

En définitive, pour le calcul des f_n intervenant dans le développement d'une fonction f(t) en série de fonctions $\varphi_n(t)$ convenablement choisies, on pourra encore mettre en oeuvre les puissantes méthodes d'inversion de la transformation Z. Nous allons envisager quelques cas particuliers intéressants.

2 - DEVELOPPEMENT DE L'ORIGINAL EN SERIE DE MAC LAURIN

Considérons les fonctions

$$\varphi_n(t) = \frac{t^n}{n!}$$

Compte tenu de la correspondance dans la transformation de Laplace

$$L\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \frac{1}{p^{n+1}}$$

il vient

(III,77)
$$\begin{cases} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!} \\ c_n \dashv z F(z) \end{cases}$$

Dans le cas particulier où F(p) est une fraction rationnelle en p de la forme

(III,78)
$$F(p) = \frac{a_0 p^{m-1} + a_1 p^{m-2} + \cdots + a_{m-1}}{p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m}$$

on aura

$$c_n \dashv \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{m-1} z^{-(m-1)}}{1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}$$

et, compte tenu de la relation d'inversion du quotient des deux transformées Z, les coefficients c_n peuvent être calculés par la relation de récurrence

(III,79)
$$c_n = a_n - \sum_{j=1}^{n} b_j c_{n-j} \qquad c_0 = a_0$$

C'est la forme simple à laquelle peut se réduire un résultat inutilement compliqué publié par VALAND ([87]) en 1968.

Exemple

Considérons le quadripôle de la figure 11

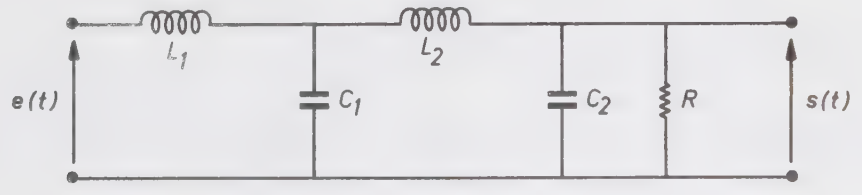


fig. 11

où $L_1 = L_2 = 1$ H, $C_1 = C_2 = 100\ \mu$F, $R = 100\ \Omega$.

La fonction de transfert s'écrit

$$G(p) = \frac{1}{1 + 2.10^{-2}p + 3.10^{-4}p^2 + 10^{-6}p^3 + 10^{-8}p^4}$$

et par conséquent si r(t) désigne la réponse indicielle

$$L\left\{r\left(\frac{t}{100}\right)\right\} = \frac{1}{p}\ \frac{1}{1 + 2p + 3p^2 + p^3 + p^4}$$

Le calcul des coefficients se fait suivant (III,79) ; par exemple, en limitant la série d'inversion au terme $\frac{t\,15}{15!}$ on obtient, pour $r(\frac{t}{100})$ l'approximation $r^*(\frac{t}{100})$ suivante

$$(III,80)\quad r^*\left(\frac{t}{100}\right) = \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} - 2\frac{t^6}{6!} + 3\frac{t^7}{7!} + 4\frac{t^8}{8!} - 8\frac{t^9}{9!} - 8\frac{t^{10}}{10!} + 21\frac{t^{11}}{11!} + 15\frac{t^{12}}{12!} - 54\frac{t^{13}}{13!} - 25\frac{t^{14}}{14!} + 136\frac{t^{15}}{15!}$$

Quelques valeurs numériques de $r^*(\frac{t}{100})$ sont indiquées dans le tableau 1 de la page 157 . Ce tableau donne également quelques valeurs numériques de $r(\frac{t}{100})$ calculées par inversion de la transformée de Laplace à l'aide des polynômes de Laguerre ($\alpha = 0,2$; $\beta = 5$; $N = 26$), valeurs numériques que nous supposerons <u>exactes</u> puisque en augmentant N on obtient encore exactement les mêmes valeurs. En comparant $r^*(\frac{t}{100})$ et $r(\frac{t}{100})$ on voit que l'approximation $r^*(\frac{t}{100})$ est excellente pour $t \leqslant 3,5$, moins bonne pour $3,5 < t \leqslant 4,5$ et désastreuse pour $t \geqslant 5$.

Afin de comparer la qualité de l'approximation qui résulte de la prise en considération d'un même nombre de coefficients dans le développement en série de Mac Laurin et dans le développement à l'aide des polynômes de Laguerre, nous avons également calculé une approximation $\tilde{r}(\frac{t}{100})$ à partir des seize premiers éléments du spectre de Laguerre ($\alpha = 0,2$; $\beta = 5$; $N = 16$). La comparaison des résultats montre que l'approximation $\tilde{r}(\frac{t}{100})$ demeure encore excellente lorsque l'approximation $r^*(\frac{t}{100})$ devient désastreuse.

Toutefois, la méthode du développement de l'original en série de Mac Laurin conserve son intérêt en raison de sa grande simplicité et du fait qu'elle permet de déterminer avec une excellente précision le comportement de l'original pour les faibles valeurs du temps.

3 - DEVELOPPEMENT DE L'ORIGINAL EN SERIE DE NEUMANN

Nous envisagerons les développements suivants faisant intervenir les fonctions de Bessel de première espèce

$$(III,81)\qquad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\nu)}\ J_{n+\nu}(t) \qquad \nu > -1$$

(III,82) $$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(\nu)}\, t^{n+\nu}\, J_{n+\nu}(t) \qquad \nu > -\tfrac{1}{2}$$

(III,83) $$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\nu)}\, t^{\frac{n+\nu}{2}}\, J_{n+\nu}(2\sqrt{t}) \qquad \nu > -1$$

Compte tenu des correspondances dans la transformation de Laplace

$$L\left\{J_{n+\nu}(t)\right\} = (p^2+1)^{-\frac{1}{2}}\left[p+(p^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]^{-(n+\nu)} \qquad \nu > -1$$

$$L\left\{t^{n+\nu} J_{n+\nu}(t)\right\} = \frac{2^{n+\nu}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(n+\nu+\tfrac{1}{2}\right)(p^2+1)^{-\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)} \qquad \nu > -\tfrac{1}{2}$$

$$L\left\{t^{\frac{n+\nu}{2}} J_{n+\nu}(2\sqrt{t})\right\} = p^{-(n+\nu+1)}\, e^{-\frac{1}{p}} \qquad \nu > -1$$

il vient

(III,84) $$a_n^{(\nu)} \dashv \frac{z^{\nu}}{2}\left(z+z^{-1}\right) F\left[\tfrac{1}{2}\left(z-z^{-1}\right)\right] \qquad \nu > -1$$

(III,85) $$\frac{2^{n+\nu}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(n+\nu+\tfrac{1}{2}\right) b_n^{(\nu)} \dashv z^{\nu+\frac{1}{2}}\, F\left(\sqrt{z-1}\right) \qquad \nu > -\tfrac{1}{2}$$

(III,86) $$c_n^{(\nu)} \dashv z^{\nu+1}\, e^{\frac{1}{z}}\, F(z) \qquad \nu > -1$$

La relation (III,84) a été établie, avec des notations différentes et dans le cas particulier $\nu = 0$, par CAMBI ([88]).

La relation (III,86), interprétée à l'aide du théorème de convolution réelle pour la transformation Z, dans le cas particulier $\nu = 0$, donne une relation connue entre les coefficients $c_n^{(o)}$ et les coefficients c_n du développement de Mac Laurin de la fonction f(t) à savoir

(III,87) $$c_n^{(o)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{c_j}{(n-j)!}$$

Remarque

L'introduction d'un terme d'amortissement $e^{-\alpha t}$ et d'un facteur d'échelle β dans les relations précédentes ne présente aucune difficulté ; si nous ne l'avons fait c'est pour éviter de compliquer l'écriture de ces diverses relations.

Exemple 1

A l'aide de (III,84) on établit pour la réponse indicielle du quadripôle de la figure 11 précédemment envisagé, en limitant la série d'inversion au terme en $J_{15}(t)$, l'approximation suivante

$$r^{**}\left(\frac{t}{100}\right) = 16\left[J_4(t) - 2J_5(t) - 2J_6(t) + 10J_7(t) + 20J_8(t) - 94J_9(t) - 102J_{10}(t) + 774J_{11}(t) + 361J_{12}(t) - 5964J_{13}(t) + 20J_{14}(t) + 45372J_{15}(t)\right]$$

Quelques valeurs numériques ainsi calculées sont indiquées dans le tableau 1 de la page 157 .

Exemple 2

Considérons le filtre passe-bas de la figure 12 comportant m cellules identiques et fermé sur l'impédance Z_L.

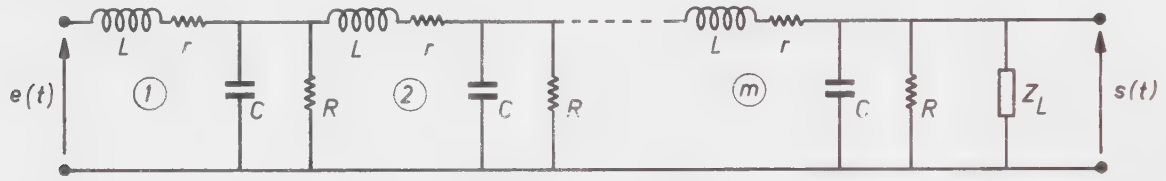


fig. 12

Nous supposerons le filtre sans distorsion, c'est-à- dire tel que

$$\frac{r}{L} = \frac{1}{RC} = \alpha$$

Certains résultats établis par ailleurs ([89]) montrent que la transformée de Laplace G(p) de la réponse impulsive g(t) vérifie la relation

$$G\left(\frac{2}{\sqrt{LC}}p - \alpha\right) = \frac{1}{P_m(4p^2) + k_0(p)S_m(4p^2)}$$

avec

$$P_m(4p^2) = \frac{1}{2}\left\{\left(1 + 2p^2 + 2p\sqrt{p^2+1}\right)^n\left(1 + \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right) + \left(1 + 2p^2 - 2p\sqrt{p^2+1}\right)^n\left(1 - \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right)\right\}$$

$$S_m(4p^2) = \frac{1}{4p\sqrt{p^2+1}}\left\{\left(1 + 2p^2 + 2p\sqrt{p^2+1}\right)^n - \left(1 + 2p^2 - 2p\sqrt{p^2+1}\right)^n\right\}$$

$$k_0(p) = k\left(\frac{2}{\sqrt{LC}}p - \alpha\right) \quad , \quad k(p) = \frac{Lp + r}{Z_L}$$

Considérons, par exemple, l'impédance Z_L obtenue en disposant en série une inductance $\frac{L}{2}$ (résistance propre $\frac{r}{2}$) et une résistance $R_o = \lambda\sqrt{\frac{L}{C}}$. Il vient

$$\frac{1}{2}(z+z^{-1})\,G\left[\frac{1}{\sqrt{LC}}(z-z^{-1})-\alpha\right] = \frac{1}{2}z^{-(2m-1)}\,\frac{1+2\lambda z^{-1}+z^{-2}+4\lambda z^{-3}-z^{-4}+2\lambda z^{-5}-z^{-6}}{1+2\lambda z^{-1}+z^{-2}-z^{-(4m+2)}+2\lambda z^{-(4m+3)}-z^{-(4m+4)}}$$

Compte tenu de (III,84), l'inversion de cette transformée Z fournit les coefficients $a_n^{(o)}$ du développement en fonctions $J_n(t)$ de

$$g_o(t) = \frac{\sqrt{LC}}{2}\,e^{\frac{\alpha\sqrt{LC}}{2}t}\,g\left(\frac{\sqrt{LC}}{2}t\right)$$

Par exemple, si $\lambda = 1$ et m=3, l'inversion de la transformée Z conduit à

$$g_o(t) = \frac{1}{2}\Big\{J_5(t)+4J_8(t)-9J_9(t)+16J_{10}(t)-24J_{11}(t)+32J_{12}(t)-40J_{13}(t)+48J_{14}(t)-56J_{15}(t)$$
$$+64J_{16}(t)-72J_{17}(t)+80J_{18}(t)-87J_{19}(t)+92J_{20}(t)-96J_{21}(t)+\cdots\Big\}$$

La théorie approchée exposée dans de nombreux ouvrages et consistant à supposer le filtre fermé sur son impédance itérative conduit, dans le cas de 3 cellules, à l'approximation suivante

$$\hat{g}_o(t) = \frac{1}{2}\Big\{J_5(t)+J_7(t)\Big\}$$

Quelques valeurs numériques de $g_o(t)$ et $\hat{g}_o(t)$ sont indiquées dans le tableau 2 de la page 157, la série ayant été limitée au terme en $J_{21}(t)$ pour le calcul de $g_o(t)$. On remarquera que les deux réponses calculées sont relativement voisines pour les valeurs de t envisagées ; ceci s'explique par le fait que l'impédance Z_L considérée constitue une bonne approximation de l'impédance itérative pour les fréquences de la bande passante. Cependant, notre méthode conserve un <u>intérêt certain</u> en ce sens qu'elle s'applique encore dans le cas d'une <u>impédance</u> Z_L <u>quelconque</u> alors que la méthode classique consistant à supposer le filtre fermé sur son impédance itérative se trouve en défaut.

4 - EXEMPLE D'EXPLOITATION DES PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION Z

Non seulement la transformation Z permet de systématiser le calcul des coefficients intervenant dans les précédents développements mais encore elle permet d'établir très simplement certaines propriétés pour ces coefficients.

Soit par exemple un quadripôle passif Q constitué de résistances R_j, d'inductances L_j et de capacités C_j. Considérons le quadripôle $Q^{\circledast}$ qui s'en déduit en substituant à chaque inductance L_j une inductance λ_j en série avec une capacité γ_j et à chaque capacité C_j une capacité γ_j' en parallèle sur une inductance λ'_j,

les résistances R_j demeurant inchangées. Nous supposerons que ces substitutions sont effectuées en respectant les lois suivantes

(III,88)
$$\frac{\lambda_j}{L_j} = \frac{\gamma'_j}{C_j} = a \qquad \gamma_j L_j = C_j \lambda'_j = \frac{1}{\omega_o^2} \qquad \forall j$$

Dans ces conditions si G(p) désigne la fonction de transfert de Q et $G^{\Phi}(p)$ celle de Q^{Φ}, on a

$$G^{\Phi}(p) = G\left(ap + \frac{\omega_o^2}{p}\right)$$

Compte tenu de la propriété bien connue

$$L^{-1}\left\{\alpha F(\alpha p)\right\} = f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

nous supposerons ci-dessous a = 1 sans restreindre la généralité du problème. Désignons par r(t) la réponse indicielle de Q et par $r^{\Phi}(t)$ celle de Q^{Φ}. Par conséquent

$$L\left\{r(t)\right\} = R(p) = \frac{1}{p} G(p)$$

$$L\left\{r^{\Phi}(t)\right\} = R^{\Phi}(p) = \frac{1}{p} G\left(p + \frac{\omega_o^2}{p}\right)$$

introduisons les coefficients des développements en série de Mac Laurin suivants

$$r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$$

$$r^{\Phi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{\Phi} \frac{t^n}{n!}$$

d'après (III,77)

$$c_n \dashv G(z)$$

$$c_n^{\Phi} \dashv G\left(z + \frac{\omega_o^2}{z}\right)$$

il résulte alors de la correspondance (I,64) pour la transformation Z

$$c_n^{\Phi} = \sum_{j=0}^{n} g(j, n-j)\, c_j$$

avec

$$g(j,n) \dashv \left(\frac{z^2}{z^2 + \omega_o^2}\right)^j$$

c'est-à-dire

$$g(j,n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impair} \\ (-\omega_o^2)^{\frac{n}{2}} \dfrac{(j)_{n/2}}{(\frac{n}{2})!} & n \text{ pair} \end{cases}$$

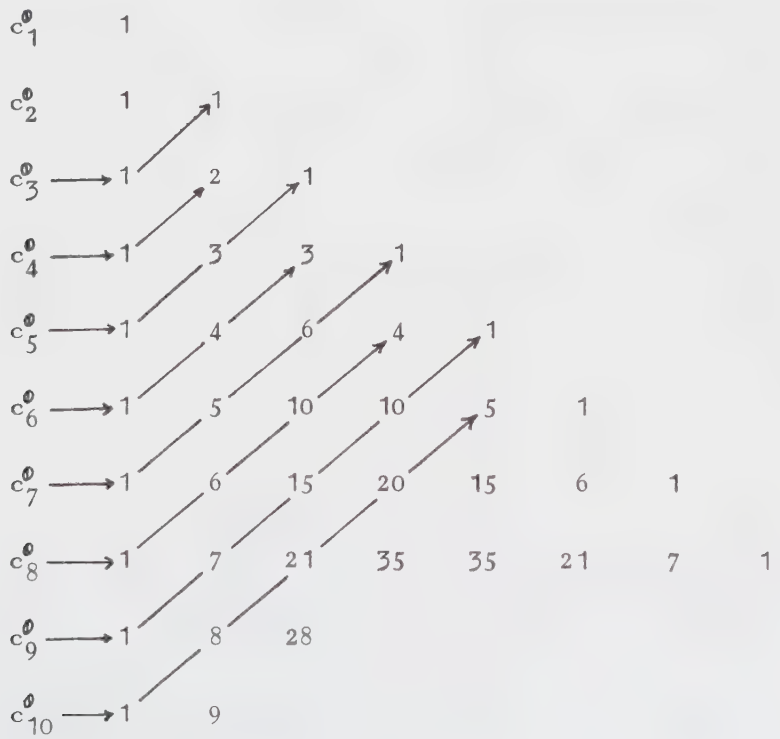
d'où finalement

(III,89) $$c_n^{\circledcirc} = \sum_{k=0}^{\leqslant \frac{n}{2}} \frac{(n-2k)_k}{k!} \left(-\omega_o^2\right)^k c_{n-2k}$$

en particulier

$$c^{\circledcirc}_0 = c_0$$
$$c^{\circledcirc}_1 = c_1$$
$$c^{\circledcirc}_2 = c_2$$
$$c^{\circledcirc}_3 = c_3 - \omega_o^2 c_1$$
$$c^{\circledcirc}_4 = c_4 - 2\,\omega_o^2 c_2$$

Pour calculer les $c_n^{\circledcirc}$ il est commode de remarquer que les coefficients numériques qui interviennent sont les coefficients du binôme. Plus précisément, ils sont obtenus par simple lecture sur le triangle de Pascal comme indiqué ci-dessous :



par exemple

$$c^{\Phi}_{10} = c_{10} - 8\,\omega_o^{\,2} c_8 + 21\,\omega_o^{\,4} c_6 - 20\,\omega_o^{\,6} c_4 + 5\,\omega_o^{\,8} c_2$$

Ainsi, si les N premiers coefficients c_n de la réponse indicielle de Q sont connus il est possible d'en déduire les N premiers coefficients c^{Φ}_n de la réponse indicielle de Q^{Φ} .

Exemple

Du quadripôle Q de la figure 11 il est possible de déduire, entre autres, le quadripôle Q^{Φ} de la figure 13

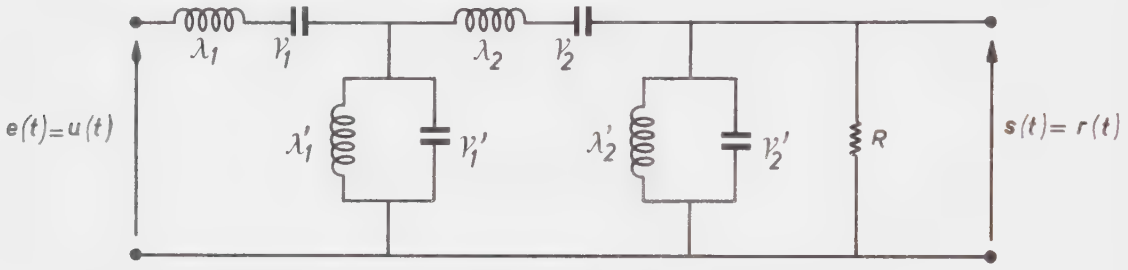


fig. 13

avec les valeurs numériques

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda'_1 = \lambda'_2 = 1\,H \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma'_1 = \gamma'_2 = 100\,\mu F \qquad R = 100\,\Omega$$

où, en accord avec (III,88) a = 1 et $\omega_o^{\,2} = 10^4$

de (III,80) on déduit simplement

$$r^{\Phi}\left(\frac{t}{100}\right) = \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} - 6\frac{t^6}{6!} + 8\frac{t^7}{7!} + 26\frac{t^8}{8!} - 44\frac{t^9}{9!} - 102\frac{t^{10}}{10!} + \cdots$$

5 - CONCLUSION

Nous avons montré que le calcul des coefficients intervenant dans l'inversion de la transformation de Laplace sous forme d'un développement de la fonction originale en série de fonctions $\varphi_n(t)$ pouvait, si les $\varphi_n(t)$ sont judicieusement choisies, se ramener à un simple problème d'inversion de transformée Z. Les cas particuliers indiqués ne sont pas les seuls possibles. Entre autres, il serait possible d'envisager des développements en série faisant intervenir les polynômes de Laguerre généralisés $L_n^S(t)$ ou même les polynômes de Konhauser $Z_n^S(t,k)$.

t	$r^*(\frac{t}{100})$	$r(\frac{t}{100})$	$\tilde{r}(\frac{t}{100})$	$r^{**}(\frac{t}{100})$
0	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000
0,5	0,002 305	0,002 305	0,002 305	0,002 305
1	0,031 226	0,031 226	0,031 226	0,031 226
1,5	0,127 801	0,127 801	0,127 801	0,127 801
2	0,311 397	0,311 397	0,311 397	0,311 397
2,5	0,558 299	0,558 297	0,558 297	0,158 154
3	0,809 704	0,809 655	0,809 655	0,809 676
3,5	1,001 900	1,001 124	1,001 124	1,001 379
4	1,103 371	1,095 263	1,095 263	1,097 432
4,5	1,160 834	1,098 119	1,098 120	1,112 226
5	1,436 484	1,051 932	1,051 936	1,127 164
5,5	.....	1,009 785	1,009 779	1,336 257
6		1,007 421	1,007 382	.....
6,5		1,047 548	1,047 571	
7		1,103 722	1,104 108	
7,5		1,139 571	1,140 087	
8		1,131 237	1,129 039	
8,5		1,080 414	1,069 775	
9		1,011 808	0,997 303	
9,5		0,957 974	0,998 941	

Tableau 1

t	$g_o(t)$	$\hat{g}_o(t)$
0	0,000 000	0,000 000
1	0,000 125	0,000 125
2	0,003 554	0,003 607
3	0,022 206	0,022 787
4	0,071 081	0,073 631
5	0,151 042	0,157 258
6	0,236 641	0,245 836
7	0,283 936	0,290 739
8	0,257 026	0,253 181
9	0,155 213	0,136 211

Tableau 2

CHAPITRE VI

PREVISION D'UN DEPASSEMENT DANS LA REPONSE D'UN CIRCUIT LINEAIRE

Nous avons publié en 1970 les principaux résultats de ce chapitre dans la revue '' Electronics Letters '' ([90]).

Etant donné la transformée de Laplace F(p) d'une fonction f(t) bornée inférieurement et supérieurement, il peut être intéressant de savoir, sans calculer f(t), si cette dernière fonction dépasse une certaine valeur V. Nous allons établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel dépassement ait lieu.

Soit une fonction $\pi(t) \geqslant 0 \quad \forall t \geqslant 0$. Pour que f(t) dépasse la valeur V, il suffit que l'intégrale dont nous supposerons l'existence

(III,90) $$I = \int_0^\infty \pi(t)\left[f(t)-V\right]dt$$

soit positive. SIGDELL ([91]) a proposé trois critères correspondant respectivement au choix pour $\pi(t)$ des fonctions

$$t^n \quad , \quad e^{-\alpha t} \quad \text{et} \quad 1+\sin(\omega t+\varphi)$$

Mais dans chacun de ces cas la condition (III, 90) n'est que suffisante, et il arrive fréquemment que ni l'un ni l'autre de ces critères ne permette de déceler un dépassement qui existe pourtant. Il était donc souhaitable d'établir une condition simple qui soit nécessaire et suffisante pour l'existence d'un dépassement et qui ne nécessite que la connaissance de la transformée de Laplace de f(t). Nous avons retenu pour $\pi(t)$ les fonctions suivantes

$$\pi(t) = \pi_n(\alpha t) = \frac{(\alpha t)^n e^{-\alpha t}}{n!} \quad , \ \alpha > 0 \ , \ n \in N$$

le critère s'énonce alors comme suit :

CRITERE

Pour qu'une fonction f(t) bornée inférieurement et supérieurement sur la demi-droite $t \geqslant 0$, dont la transformée de Laplace F(p) est donnée, prenne une valeur supérieure à V durant un intervalle de temps non nul, il faut et il suffit que l'on puisse trouver un couple (n, α) tel que

(III,91) $$\alpha F\left[\alpha\left(1-\frac{1}{z}\right)\right] \vdash f_n(\alpha) > V$$

α désignant un paramètre strictement positif et n un entier positif ou éventuellement nul.

DEMONSTRATION

a) La condition est suffisante :

Soit

$$f_n(\alpha) = \int_0^\infty \alpha \pi_n(\alpha t) f(t) dt$$

la transformée Z de $\pi_n(\alpha t)$ étant

$$\pi_n(\alpha t) \dashv e^{-\alpha\left(1-\frac{1}{z}\right)t}$$

on a, pour $|z| > 1$

$$f_n(\alpha) \dashv \int_0^\infty e^{-\alpha\left(1-\frac{1}{z}\right)t} \alpha f(t) dt = \alpha F\left[\alpha\left(1-\frac{1}{z}\right)\right]$$

f(t) dépassera sûrement la valeur V si

$$\int_0^\infty \alpha \pi_n(\alpha t)\left[f(t)-V\right] dt > 0$$

soit, puisque $\int_0^\infty \alpha \pi_n(\alpha t) dt = 1$, si

$$f_n(\alpha) > V$$

b) La condition est nécessaire :

Pour montrer que la condition (III, 91) est nécessaire, nous devrons faire usage de la propriété suivante, démontrée en annexe :

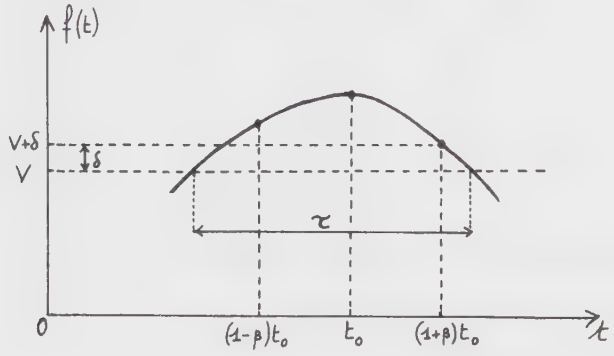
Soit β non nul tel que $0 < \beta < 1$; alors le rapport

(III,92)
$$\rho_n = \frac{\int_0^{\infty} \pi_n(x)\,dx - \int_{(1-\beta)n}^{(1+\beta)n} \pi_n(x)\,dx}{\int_{(1-\beta)n}^{(1+\beta)n} \pi_n(x)\,dx}$$

peut être rendu arbitrairement petit en choisissant n suffisamment grand.

Supposons qu'au voisinage de $t = t_0$, $f(t)$ dépasse V durant un intervalle de temps $\tau \neq 0$. Il est alors possible de trouver β $(0 < \beta < 1)$ comme indiqué sur la figure 14

fig. 14



et tel que

(III,93)
$$(1-\beta)t_0 \leqslant t \leqslant (1+\beta)t_0 \Longrightarrow f(t) \geqslant V+\delta \qquad \delta > 0$$

Considérons l'intégrale

(III,94)
$$I_n(\alpha) = \int_0^{\infty} \alpha\, \pi_n(\alpha t)\left[f(t)-V\right] dt$$

qui se décompose comme suit

$$I_n(\alpha) = \int_0^{\infty} \alpha\, \pi_n(\alpha t)\left[f(t)-V\right] dt - \int_{(1-\beta)t_0}^{(1+\beta)t_0} \alpha\, \pi_n(\alpha t)\left[f(t)-V\right] dt + \int_{(1-\beta)t_0}^{(1+\beta)t_0} \alpha\, \pi_n(\alpha t)\left[f(t)-V\right] dt$$

mais, $f(t)$ est bornée inférieurement par hypothèse, donc

$$f(t)-V > (m-V) \qquad \forall t \geqslant 0$$

m désignant la borne inférieure de f(t) sur la demi-droite $t \geqslant 0$; aussi, compte tenu de (III, 93)

$$I_n(\alpha) > (m-V)\left[\int_0^{\infty} \alpha \pi_n(\alpha t)dt - \int_{(1-\beta)t_o}^{(1+\beta)t_o} \alpha \pi_n(\alpha t)dt\right] + \delta \int_{(1-\beta)t_o}^{(1+\beta)t_o} \alpha \pi_n(\alpha t)dt$$

après le changement de variable $x = \alpha t$, avec $\alpha = \frac{n}{t_o}$ et introduction du rapport ρ_n précédemment défini il vient

$$I_n(\alpha) > \left[\delta + (m-V)\rho_n\right] \int_{(1-\beta)n}^{(1+\beta)n} \pi_n(x)dx$$

il suffit de choisir n assez grand pour que

$$\rho_n < \frac{\delta}{|m-V|}$$

et alors, puisque $\pi_n(x)$ est une fonction positive pour $x > 0$

$$I_n(\alpha) > 0$$

inégalité qui signifie, d'après (III, 94)

$$f_n(\alpha) > V$$

La condition (III, 91) est donc nécessaire.

REMARQUES

1°) Il résulte de l'étude précédente que s'il existe un couple (n, α) satisfaisant la condition (III, 91), alors tous les couples $(n + k, \alpha + \frac{k}{t_o})$ où k désigne un entier positif satisfont aussi (III, 91).

2°) Pour que f(t) bornée inférieurement et supérieurement ne dépasse pas la valeur V il faut et il suffit que

$$f_n(\alpha) < V \qquad \forall (n, \alpha)$$

ceci pourra servir de guide dans le choix des paramètres d'un circuit lorsque l'on s'impose des conditions sur l'amplitude de la réponse.

3°) Notons que $f_n(\alpha)$ n'est autre que la transformée de Poisson de $f(\frac{t}{\alpha})$.

4°) Enfin, en faisant successivement usage des propriétés (I, 70 b) et (I, 2) pour la transformation Z on montre, compte tenu de (III, 2), que $f_n(\beta - \alpha)$ s'exprime à l'aide de la transformée de Laguerre $f_n(\alpha, \beta)$ de f(t) suivant la relation

(III,95)
$$f_n(\beta-\alpha) = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f_j(\alpha, \beta)$$

Par conséquent, étant donné le spectre de Laguerre $\{f_n(\alpha, \beta)\}$ d'une fonction f(t) bornée inférieurement et supérieurement, s'il existe un entier n tel que

$$\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f_j(\alpha,\beta) > V$$

et si $\beta - \alpha > 0$, on peut affirmer, sans calculer f(t), que cette fonction dépasse la valeur V. En particulier, il en sera ainsi si

$$\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right) f_0(\alpha,\beta) > V$$

SUR LE CALCUL DE $f_n(\alpha)$

Calculer $f_n(\alpha)$ revient à inverser la transformée Z

$$\alpha F\left[\alpha\left(1-\frac{1}{z}\right)\right]$$

Des correspondances (I, 35) et (I, 2) pour la transformation Z on déduit une relation d'intérêt purement théorique, à savoir

(III,96)
$$f_n(\alpha) = (-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{n!} F^{(n)}(\alpha) \qquad F^{(n)}(p) = \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

Dans le cas particulier important où F(p) est une fraction rationnelle en p de la forme

$$F(p) = \frac{a_0 + a_1 p + \cdots + a_{l-1} p^{l-1}}{b_0 + b_1 p + \cdots + b_l p^l}$$

on pourra écrire après réduction

$$f_n(\alpha) \dashv \alpha F\left[\alpha\left(1-\frac{1}{z}\right)\right] = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_{l-1} z^{-(l-1)}}{1 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_l z^{-l}}$$

les $f_n(\alpha)$ se calculent alors de proche en proche à l'aide de la relation de récurrence

(III,97)
$$f_n(\alpha) = c_n - \sum_{j=1}^{n} d_j f_{n-j}(\alpha) \qquad f_0(\alpha) = c_0$$

particulièrement bien adaptée au traitement sur calculateur numérique.

Si les calculs doivent être effectués '' à la main '' on fera avantageusement usage de la disposition tabulaire de PIERRE ([16]).

SUR LE CHOIX DE α

Pratiquement, il convient de choisir α aussi voisin que possible de la valeur α_o rendant $f_n(\alpha)$ maximale ; les considérations suivantes peuvent alors être utiles. En effet

$$f_n(\alpha) = \int_0^\infty \alpha\, \pi_n(\alpha t)\, f(t)\, dt$$

et pour les réponses f(t) susceptibles de se rencontrer en théorie des circuits, la dérivation par rapport à α sous le signe d'intégration est généralement permise. On établit ainsi aisément les relations suivantes

(III,98) $$\frac{\partial f_n(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{n+1}{\alpha}\left[f_n(\alpha) - f_{n+1}(\alpha)\right] = -\frac{n+1}{\alpha}\Delta f_n(\alpha)$$

(III,99) $$\frac{\partial^2 f_n(\alpha)}{\partial \alpha^2} = \frac{n+1}{\alpha^2}\left[(n+2)f_{n+2}(\alpha) - 2(n+1)f_n(\alpha) + n f_n(\alpha)\right] = \frac{n+1}{\alpha^2}\Delta^2\left[n f_n(\alpha)\right]$$

On se fixe alors le nombre de termes que l'on calculera (f_o, f_1, ..., f_{N+2}). On cherche α_o qui annule $\frac{\partial f_N(\alpha)}{\partial \alpha}$ c'est-à-dire tel que $f_N(\alpha_o) = f_{N+1}(\alpha_o)$. En pratique on pourra calculer, à l'aide de (III, 98), $\frac{\partial f_N(\alpha)}{\partial \alpha}$ pour quelques valeurs de α ; il se peut que l'on découvre ainsi un $f_n(\alpha) > V$ et le problème est résolu ; sinon, une interpolation graphique donnera α_o. On calculera alors $f_N(\alpha_o)$ qui, si la dérivée seconde est négative, correspond à un maximum de $f_N(\alpha)$; les chances de trouver $f_N(\alpha_o) > V$ sont alors accrues. Dans le cas contraire, après avoir envisagé d'autres maxima éventuels de $f_N(\alpha)$, il convient d'augmenter N. Cependant, à la lumière des nombreux exemples que nous avons testés, on peut penser qu'un dépassement relativement important sera rapidement décelé et qu'à partir d'un certain rang N ce dépassement est probablement négligeable.

EXEMPLES NUMERIQUES

Exemple 1

Considérons la transformée de Laplace

$$F(p) = \frac{4 + 7{,}5p + 4{,}5p^2}{P(4 + 8p + 5p^2 + p^3)}$$

la fonction originale f(t) tend vers 1 lorsque $t \to \infty$. Nous allons montrer qu'elle dépasse la valeur V = 1.

En prenant α = 1, il vient

$$f_n(1) \dashv F(1-z^{-1}) = \frac{\frac{1}{18}\left(16 - 16{,}5z^{-1} + 4{,}5z^{-2}\right)}{1 - \frac{1}{18}\left(39z^{-1} - 29z^{-2} + 9z^{-3} - z^{-4}\right)}$$

Les $f_n(1)$ se calculent à l'aide de la relation de récurrence (III,97). On trouve

$$f_o(1) = 0,888\ 888\ 888$$
$$f_1(1) = 1,009\ 259\ 259$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

comme $f_1(1) > 1$, f(t) dépasse donc la valeur V = 1. En effet, l'étude de la fonction originale permet d'établir l'existence d'un dépassement de l'ordre de 11,6 %.

Notons que les critères de Sigdell ne permettent pas de déceler ce dépassement.

Exemple 2

Considérons la transformée de Laplace de la réponse indicielle d'un filtre de Thomson du deuxième ordre

$$F(p) = \frac{3}{p(3 + 3p + p^2)}$$

la fonction originale f(t) tend vers 1 lorsque $t \to \infty$. Montrons qu'elle dépasse cette valeur V = 1.

En prenant $\alpha = \frac{1}{3}$ il vient

$$f_n(\tfrac{1}{3}) \dashv \tfrac{1}{3} F\left[\tfrac{1}{3}(1-z^{-1})\right] = \frac{\frac{27}{37}}{1 - \frac{1}{37}(48z^{-1} - 12z^{-2} + z^{-3})}$$

à l'aide de la relation de récurrence (III,97) on calcule

$$f_o(\tfrac{1}{3}) = 0,729\ 729\ 729$$
$$f_1(\tfrac{1}{3}) = 0,946\ 676\ 406$$
$$f_2(\tfrac{1}{3}) = 0,991\ 451\ 641$$
$$f_3(\tfrac{1}{3}) = 0,998\ 899\ 774$$
$$f_4(\tfrac{1}{3}) = 0,999\ 903\ 942$$
$$f_5(\tfrac{1}{3}) = 1,000\ 001\ 178$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

comme $f_5(\frac{1}{3}) > 1$, f(t) dépasse donc la valeur V = 1. En effet, on sait qu'il existe dans ce cas un très léger dépassement de l'ordre de 0,43 % et il est remarquable que le calcul de six termes seulement ait permis de mettre en évidence un si faible dépassement.

Exemples 3, 4 et 5

Un programme de recherche d'un dépassement de la valeur V = 1 (choix non restrictif) à l'aide du calculateur WANG 700 a été élaboré pour des transformées de Laplace de la forme

$$F(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + b_4 p^4}$$

Les données a_0, ..., a_3, b_0, ..., b_4 sont introduites au clavier et imprimées pour contrôle. Le calcul de $f_n(\alpha)$ pour n = 0, 1, 2, ..., N où α prend successivement les valeurs α_i, $\alpha_i + \Delta\alpha$, $\alpha_i + 2\Delta\alpha$, ..., α_f peut s'effectuer suivant (III,97) dès l'introduction de α_i, α_f, $\Delta\alpha$ et N au clavier.

Une réponse négative [tous les $f_n(\alpha)$ calculés sont inférieurs à l'unité] se traduit par l'impression de la mention '' PAS DE DEPASSEMENT DECELE ''. Par contre, dans le cas d'une réponse positive, le calcul des $f_n(\alpha)$ est arrêté dès qu'un $f_n(\alpha)$ supérieur à l'unité est rencontré ; le dépassement de la valeur V = 1 ainsi décelé se traduit par l'impression du mot '' DEPASSEMENT '' et du premier $f_n(\alpha)$ supérieur à l'unité rencontré ainsi que des valeurs de n et α correspondantes.

Les résultats relatifs à l'analyse de trois exemples à l'aide du calculateur WANG 700 sont reproduits page 167. L'exemple 3 n'est autre que l'exemple 7 du paragraphe 3 du chapitre III pour lequel nous avions trouvé un dépassement de 1 % ; l'exemple 4 concerne la réponse indicielle d'un filtre de Thomson du troisième ordre qui présente, on le sait, un dépassement de 0,75 %, dépassement qui, comme le précédent, est rapidement décelé. Quant à l'exemple 5 par contre, même avec N grand et $\Delta\alpha$ faible, il est impossible de mettre en évidence un éventuel dépassement ; une étude de la fonction originale confirmerait d'ailleurs l'absence de dépassement.

En définitive, un dépassement relativement important et donc parfois indésirable pour certaines applications pratiques sera rapidement décelé. Quant à l'interprétation d'une réponse négative, plus délicate certes, il convient de noter qu'elle ne signifie pas nécessairement absence de dépassement ; en effet, si théoriquement la condition (III,91) est nécessaire et suffisante on ne peut, pour des raisons pratiques évidentes, envisager tous les couples (n, α) possibles. Toutefois, ainsi que nous l'avons déjà signalé, si l'intervalle (α_i, α_f) et le pas $\Delta\alpha$ sont convenablement choisis et si N est suffisamment grand (de l'ordre de quelques dizaines) les nombreux exemples testés ont montré que le dépassement, s'il existe, est très probablement pratiquement négligeable dans le cas d'une réponse négative.

Exemple 3 : $F(p) = \dfrac{1 + 0{,}35p + 0{,}077p^2}{p(1 + p + 0{,}427p^2 + 0{,}077p^3)}$

DONNEES

a	0	1.000000
	1	.350000
	2	.077000
	3	.000000
b	0	.000000
	1	1.000000
	2	1.000000
	3	.427000
	4	.077000

DEPASSEMENT

$f_n(\alpha) = 1.000003966$ pour n = 5 et α = .60

Exemple 4 : $F(p) = \dfrac{15}{p(15 + 15p + 6p^2 + p^3)}$

DONNEES

a	0	15.000000
	1	.000000
	2	.000000
	3	.000000
b	0	.000000
	1	15.000000
	2	15.000000
	3	6.000000
	4	1.000000

DEPASSEMENT

$f_n(\alpha) = 1.000000949$ pour n = 9 et α = 1.40

Exemple 5 : $F(p) = \dfrac{2 + 2p + p^2}{p(2 + 5p + 4p^2 + p^3)}$

DONNEES

a	0	2.000000
	1	2.000000
	2	1.000000
	3	.000000
b	0	.000000
	1	2.000000
	2	5.000000
	3	4.000000
	4	1.000000

PAS DE DEPASSEMENT DECELE

C O N C L U S I O N

Les propriétés de la transformation Z initialement imaginée en vue de simplifier l'étude des systèmes à échantillonnage peuvent également être exploitées avec succès tant en mathématiques appliquées que dans l'étude des signaux et systèmes. En particulier, quelques unes des propriétés originales que nous avons établies pour la transformation Z s'avèrent d'un emploi extrêmement fructueux en théorie des fonctions spéciales : les quelques exemples examinés au cours de cette étude en donnent une idée.

Les puissantes méthodes d'inversion de la transformation Z peuvent aussi être mises à profit pour résoudre le problème de l'inversion numérique d'une transformée de Laplace F(p) à l'aide d'un développement de la fonction originale f(t) en série de fonctions $\varphi_n(t)$ judicieusement choisies ou encore pour mettre en évidence un éventuel dépassement dans la réponse d'un circuit linéaire. La transformation Z constitue également un outil mathématique extrêmement précieux pour l'étude de transformations intégrales fonctions de la variable discrète n telles que la transformation de Laguerre, transformation qui nous fut suggérée par nos recherches sur l'inversion numérique de la transformation de Laplace à l'aide des polynômes de Laguerre. Nous avons montré que cette transformation de Laguerre possède des propriétés séduisantes qui en font une méthode de discrétisation particulièrement bien adaptée au traitement sur calculateur numérique ; en effet, la représentation d'un signal ou d'un système à l'aide d'un nombre relativement faible d'éléments conduit à d'excellents résultats numériques ; de plus, la méthode de discrétisation basée sur la transformation de Laguerre possède sur les méthodes classiques un atout considérable : le choix du pas Δt, équivalent de la '' période d'échantillonnage '', se fait a posteriori, peut être modifié à volonté et n'affecte nullement la précision des résultats numériques. En bref, la méthode du développement de la fonction originale à l'aide des polynômes de Laguerre semble être l'une des meilleures méthodes d'inversion numérique de la transformation de Laplace connues à ce jour.

Enfin, il convient de rappeler une propriété séduisante de la transformation de Laguerre : elle conduit naturellement à une représentation des signaux à l'aide de fonctions orthogonales sur la demi-droite $t \geqslant 0$. C'est pourquoi, nous avons l'intention d'examiner l'application de cette transformation à la réalisation de circuits présentant une réponse approchant au mieux, au sens des moindres carrés, une réponse souhaitée ; en particulier, il serait intéressant de rechercher ainsi des circuits de correction pour amplificateurs H.F. permettant de transmettre le signal échelon unité avec une déformation aussi faible que possible au sens des moindres carrés, un retard inévitable étant évidemment admis.

Outre certaines propriétés originales, des applications que l'on pourrait qualifier de '' non classiques '' pour la transformation Z ont été étudiées dans ce travail. Nous espérons avoir ainsi contribué à élargir le domaine d'application de cette transformation particulièrement bien adaptée à l'étude des suites discrètes et qui, à une époque où le recours aux méthodes numériques devient chaque jour plus fréquent, devrait connaître dans diverses branches de la physique et de la physique mathématique un succès comparable à celui de la transformation de Laplace.

BIBLIOGRAPHIE

1 - KUO B.C., '' Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems ''
Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

2 - FREEMAN H., '' Discrete-Time Systems (an introduction to the theory) ''
John Wiley and Sons, Inc.,New York, London, Sydney,1965.

3 - JURY E.I., '' Theory and Application of the Z - Transform Method ''
John Wiley and Sons, Inc.,New York, 1964.

4 - GENIN R., '' Note on the Z Transform ''
Electron. Lett., 1967, 5, pp. 188-189.

5 - JURY E.I., GALTIERI C.A., '' A note on the inverse Z Transformation ''
IRE Trans., 1961, CT 8, pp. 371-374.

6 - CALVEZ L.C., GENIN R., '' Sur les relations entre les fonctions génératrices et les formules de type Rodrigues ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1969, 269 A, pp. 651-654.

7 - FAVARD J., '' Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique ''
Gauthier-Villars, Paris, II, 1960, pp. 323-324.

8 - CHATTERJEA S.K.,'' Operational derivation of some generating functions connected with classical polynomials ''
Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S. de Roumanie, 1968, 12 (60), pp. 25-33.

9 - CALVEZ L.C., GENIN R., '' Généralisation des relations entre les fonctions génératrices et les formules de type Rodrigues ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1969, 269 A, pp. 1205-1207.

10 - CALVEZ L.C., GENIN R., '' Un théorème sur la transformation Z et son application aux fonctions génératrices ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1970, 270 A, pp. 329-331.

11 - BROWN J.W., '' New generating functions for classical polynomials ''
Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 21, pp. 263-268.

12 - CALVEZ L.C., GENIN R., '' Généralisation d'un théorème de Brown et fonctions génératrices de quelques séries hypergéométriques ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1970, 270 A, pp. 527-530.

13 - BROWN J.W., '' On the Sheffer A-Type of certain modified polynomials sets ''
Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 23, pp. 718-722.

14 - RAINVILLE E.D., '' Special Functions ''
The Mac Millan Company, New York. Third Printing, 1965.

15 - BADGETT L.R., '' A new method of obtaining inverse Z transforms ''
Proc. IEEE, 1966, 54, pp. 1010-1011.

16 - PIERRE D.A., '' A tabular algorithm for Z transform inversion ''
Control Engng, 1963, 10, pp. 110-111.

17 - BARRUCAND P., '' Sur une formule générale de récurrence et quelques unes de ses applications ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1967, 264 A, pp. 792-794.

18 - PAIN A., '' Sur une formule de récurrence concernant les polynômes de Laguerre ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1968, 267 A, pp. 929-931.

19 - PAIN A., '' Sur une formule de récurrence ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1968, 267 A, pp. 510-512.

20 - EDERLYI A., '' Higher Transcendental Functions ''
McGraw-Hill Book Company, Inc., III, 1955.

21 - CHATTERJEA S.K., SAHA B.B., '' Sur une classe de fonctions génératrices ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1969, 268 A, pp. 801-803.

22 - CHATTERJEA S.K.,'' Sur les ensembles engendrés par $G(2xz - z^2)$, du point de vue des groupes de transformations continus ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1969, 269 A, pp. 241-244.

23 - SRIVASTAVA H.M.,'' Generating functions for Jacobi and Laguerre polynomials ''
Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 23, pp. 590-595.

24 - KAUFMAN B., '' Special functions of mathematical physics from the viewpoint of Lie algebra ''
J. Math. Phys., 1966, 7, pp. 447-457.

25 - CHATTERJEA S.K.,'' Quelques fonctions génératrices des polynômes d'Hermite du point de vue de l'algèbre de Lie ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1969, 268 A, pp. 600-602.

26 - DAS M.K., '' Sur les polynômes d'Hermite du point de vue de l'algèbre de Lie ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1970, 270 A, pp. 452-455.

27 - DAS M.K., '' Sur les polynômes de Laguerre du point de vue de l'algèbre de Lie ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1970, 270 A, pp. 380-383.

28 - GOULD H.W., HOPPER A.T., '' Operational formulas connected with two generalizations of Hermite polynomials ''
Duke Math. J., 1962, 29, pp. 51-64.

29 - CHATTERJEA S.K.,'' Operational formulas for certain classical polynomials ''
Quart. Journ. of Math., 1963, 14, pp. 241-246.

30 - AL-SALAM W.A., '' Operational representations for the Laguerre and other polynomials ''
Duke Math. J., 1964, 31, pp. 127-142.

31 - DAS M.K., '' Operational representation of Laguerre polynomials ''
Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1967, 18, pp. 335-338.

32 - CHATTERJEA S.K.,'' Operational results connected with some classical polynomials ''
Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1968, 19, pp. 53-58.

33 - CHATTERJEA S.K.,'' Représentations opérationnelles pour les polynômes d'Hermite ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1967, 265 A, pp. 683-684.

34 - CHATTERJEA S.K.,'' Applications de la représentation opérationnelle des polynômes d'Hermite ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1967, 265 A, pp. 731-733.

35 - CHATTERJEA S.K.,'' An operational formula for a function defined by a generalized Rodrigues' ''
Boll. Un. Mat. Ital., 1968, 1, pp. 508-513.

36 - KONHAUSER J.D., '' Biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials ''
Pacific J. Math., 1967, 21, pp. 303-314.

37 - SPENCER L., FANO U., '' Penetration and diffusion of X - rays. Calculation of spatial distributions by polynomial expansion ''
J. Research. Nati. Bur. Standards, 1951, 46, pp. 446-456.

38 - PREISER S., '' An investigation of biorthogonal polynomials derivable from ordinary differential equations of third order ''
J. Math. Anal. Appl., 1962, 4, pp. 38-64.

39 - GENIN R., CALVEZ L.C., '' Sur les fonctions génératrices de certains polynômes biorthogonaux ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1969, 268 A, pp. 1564-1567.

40 - GENIN R., CALVEZ L.C., '' Sur quelques propriétés de certains polynômes biorthogonaux ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1969, 269 A, pp. 33-35.

41 - CALVEZ L.C., GENIN R., '' Applications des relations entre les fonctions génératrices et les formules de type Rodrigues ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1970, 270 A, pp. 41-44.

42 - CARLITZ L., '' A note on certain biorthogonal polynomials ''
Pacific J. Math., 1968, 24, pp. 425-430.

43 - BROWN J.W., '' On zero type sets of Laguerre polynomials ''
Duke Math. J., 1968, 35, pp. 821-823.

44 - CARLITZ L., '' Some generating functions for Laguerre polynomials ''
Duke Math. J., 1968, 35, pp. 825-827.

45 - BRAGG R.,
Boll. Un. Mat. Ital., 1968, Ser IV, An. I, pp. 347-355

46 - CHATTERJEA S.K.,'' A generalization of Laguerre polynomials ''
Collectanea Mathematica, 1963, 15, pp. 285-292.

47 - TOSCANO , '' Una classe di polinomi della matematica attuariale ''
Riv. Mat. Univ. Parma, 1950, 1, pp. 459-470.

48 - KRALL H.L., FRINK O., '' A new class of orthogonal polynomials : The Bessel polynomials ''
Trans. Am. Math. Soc., 1949, 65, pp. 100-115.

49 - GENIN R., CALVEZ L.C., '' Sur une généralisation des polynômes de Gottlieb ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1970, 271 A, pp. 552-554.

50 - MAC CULLY J.C., '' The operational calculus of the Laguerre Transform ''
Thèse, Université de Michigan, 1957.

51 - GENIN R., CALVEZ L.C., '' Sur quelques propriétés de la transformation de Laguerre ''
C.R. Acad. Sci., Paris, 1968, 267 A, pp. 108-110.

52 - GENIN R., CALVEZ L.C., '' Inversion numérique de la transformation de Laplace à l'aide des polynômes de Laguerre ''
Electron. Lett., 1968, 4, pp. 461-462.

53 - BOZZO C., '' Notion de transformée de Laguerre d'un signal continu ''
R.A.I.R.O., 1972, n° J-1, pp. 35-53.

54 - HEAD J.W., WILSON W.P., '' Laguerre functions : Tables and properties ''
Proc. IEE, 1956, 103 C, pp. 428-436.

55 - USPENSKY J.V., '' On the development of arbitrary functions in series of Hermite's and Laguerre's polynomials ''
Annals of Mathematics, 1926-1927, 28 (2ème série), pp. 593-619.

56 - DEAL C.J.R., '' Optimum Laguerre series expansion of functions ''
S. M. Thesis, Dep. Elec. Eng.,M.I.T., Cambridge, Mass., 1962.

57 - CLOWES G.J., '' Choice of the time-scaling factor for linear system approximations using orthonormal Laguerre functions ''
IEEE Trans., 1965, AC - 10, pp. 487-489.

58 - KING J.J., O'CANAINN T., '' Optimum pole positions for Laguerre function models ''
Electron. Lett., 1969, 5, pp. 601-602.

59 - SCHETZEN M., '' Asymptotic optimum Laguerre series ''
IEEE Trans.,1971, CT - 18, pp. 493-500.

60 - PARKS T.W., '' Choice of time scale in Laguerre approximations using signal measurements ''
IEEE Trans.,1971, AC - 16, pp. 511-513.

61 - WOLF E., MEHTA C.L., '' Determination of the statistical properties of light from photoelectric measurements ''
Phys. Rev. Lett., 1964, 13, pp. 705-707.

62 - PIOVOSO M.J., BOLGIANO L.P., '' The probability density of light energy from photoelectric measurements ''
Proc. IEEE (Letters), 1967, 55, pp. 1519-1520.

63 - BOLGIANO L.P., PIOVOSO M.J., '' Poisson transform signal analysis ''
IEEE Trans. (correspondence), 1968, IT 14, pp. 600-601.

64 - FAIRMAN F.W., SHEN D.W.C., '' On the relationship of the Laguerre and impulse distribution expansions of signals to the Poisson transform ''
Proc. IEEE (Letters), 1968, 56, pp. 1403-1404.

65 - HINDIN H.J., '' Three theorems concerning the Poisson transform ''
Proc. IEEE (Letters), 1968, 56, pp. 2194-2195.

66 - HINDIN H.J., '' The Poisson transform of a periodic function ''
IEEE Trans., 1969, E - 12, p. 143.

67 - ROUSSEAU M., '' Propriétés statistiques des photoélectrons ''
J. Physique, 1969, 30, pp. 675-686.

68 - BOLGIANO L.P., PIOVOSO M.J., '' Relationship of Poisson transform to Laguerre expansions ''
IEEE Trans., 1969, C - 18, pp. 1128-1131.

69 - FAIRMAN F.W., '' Periodic sampling and the Poisson transform ''
Electron. Lett., 1969, 5, pp. 569-570.

70 - TRICOMI F., '' Transformazione di Laplace e polinomi di Laguerre ''
R.C. Accad. Naz. Lincei, 1935, Ser.6, 21, pp. 232-239, 420-426.

71 - AIGRAIN P.R., WILLIAMS E.M., '' Design of optimum transient response amplifiers ''
Proc. IRE, 1949, 37, pp. 873-879.

72 - PAPOULIS A., '' A new method of inversion of the Laplace transform ''
Q. Appl. Math., 1956, 14, pp. 405-414.

73 - WARD E.E., '' The calculation of transients in dynamical systems ''
Proc. Cambridge Phil. Soc., 1954, 50, pp. 49-59.

74 - WEEKS W.T., '' Numerical inversion of Laplace transform using Laguerre functions ''
J. ACM, 1966, 13, pp. 419-429.

75 - PICONE M., '' Sulla transformata di Laplace ''
R.C. Accad. Naz. Lincei, 1935, Ser. 6, 21, pp. 306-313.

76 - WEISS G., '' On the expansion of a function in terms of Laguerre polynomials ''
IRE Trans., 1955, CT - 2, p. 283.

77 - SMITH F.J., '' An algorithm for summing orthogonal polynomial series and their derivatives with applications to curve-fitting and interpolation ''
Math. Comput., 1965, 19, pp. 33-36.

78 - LIOU M.L., '' A novel method of evaluating transient response ''
Proc. IEEE, 1966, 54, pp. 20-23.

79 - DUBNER H., ABATE J., '' Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform ''
Commun. ACM, 1968, 15, pp. 115-123.

80 - GHAUSI M.S., '' Principles and Design of Linear Active Circuits ''
McGraw-Hill Book Company, 1965.

81 - NASLIN P., '' Calcul symbolique et diagrammes de fluence ''
Dunod, 1963, pp. 100-101.

82 - GENIN R., CALVEZ L.C., '' Laguerre-transform signal analysis ''
Electron. Lett., 1970, 6, pp. 587-588.

83 - LEGRAS J., '' Précis d'analyse numérique ''
Dunod, Paris, 1963, pp. 150-151.

84 - SALZER H.E., ZUCKER R., '' Table of the zeros and weight factors of the first fifteen Laguerre polynomials ''
Amer. Math. Soc., Bull., 1949, 55, pp. 1004-1012.

85 - KERNEUZET A., '' Principe et exemples d'application d'un générateur de fonctions de Laguerre ''
Thèse 3e cycle, Rennes, 1972.

86 - KERNEUZET A., GENIN R., '' Principe et applications d'un générateur de fonctions de Laguerre ''
Automatisme, 1972, 17, pp. 375-379.

87 - VALAND J., '' Calculation of transient response ''
Electron. Lett., 1968, 4, p. 261.

88 - CAMBI E., '' Inverse Laplace transforms expressed as Neumann series ''
J. Math. Phys., 1956, 35, pp. 114-122.

89 - CALVEZ L.C., '' Application de la transformation Z à la théorie des circuits et à quelques problèmes de calcul opérationnel ''
Thèse 3e cycle, Rennes, 1969.

90 - GENIN R., CALVEZ L.C., '' Sur l'existence d'un dépassement dans la réponse indicielle d'un circuit linéaire ''
Electron. Lett., 1970, 6, pp. 55-56.

91 - SIGDELL J.E., '' On the existence of an overshoot in the step-function response of a linear circuit ''
Electron. Lett., 1967, 3, pp. 66-68.

92 - JOUSSET M., '' Réalisation d'un appareil destiné à la mesure des phases et des amplitudes en basses fréquences (10^{-4} Hz et 10^{3} Hz) pour l'étude des caractéristiques des servo-mécanismes ''
Thèse Ingénieur C.N.A.M., Brest, 1972.

SUR UNE PROPRIETE DES FONCTIONS

$$\pi_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

Nous avons rencontré de telles fonctions lors de l'étude théorique concernant la prévision d'un dépassement dans la réponse d'un circuit linéaire. A ce sujet, nous avons affirmé que si β désignait un nombre positif inférieur à l'unité, alors le rapport

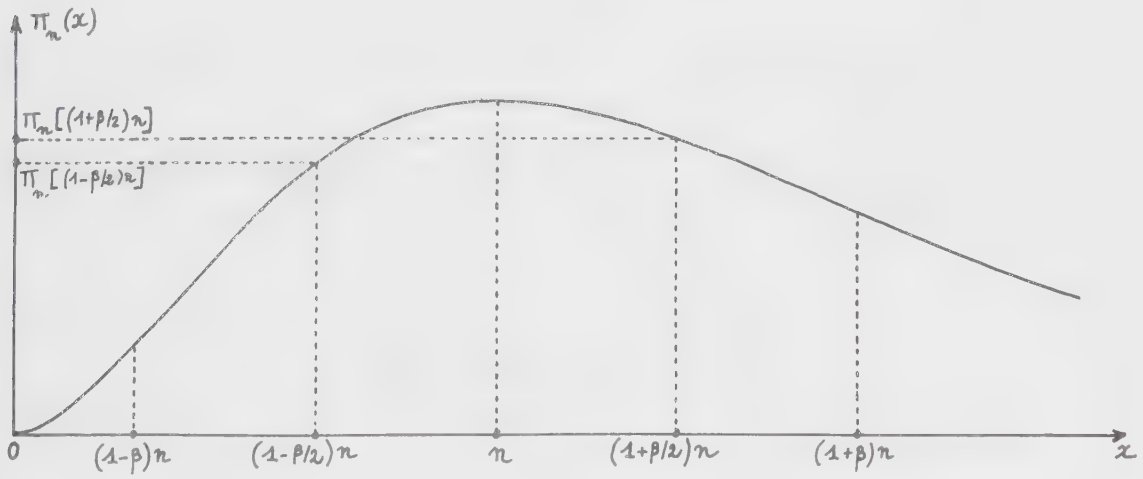
$$\rho_n = \frac{\int_0^{\infty} \pi_n(x)\,dx - \int_{(1-\beta)n}^{(1+\beta)n} \pi_n(x)\,dx}{\int_{(1-\beta)n}^{(1+\beta)n} \pi_n(x)\,dx}$$

pouvait être rendu arbitrairement petit à condition de prendre n suffisamment grand. Nous allons démontrer cette propriété.

Il convient de noter que toutes les fonctions $\pi_n(x)$ sont positives pour $x > o$ et que par conséquent, les diverses intégrales envisagées ci-dessous sont toutes positives, remarque qui nous permettra d'alléger l'écriture en évitant l'emploi de valeurs absolues.

Au cours de la démonstration qui va suivre, $\mathcal{E}$ désignera toujours un nombre positif arbitrairement petit et nous supposerons $n \geqslant 1$.

Pour un n donné, la fonction $\pi_n(x)$ est croissante si $o \leqslant x < n$ et décroissante si $x > n$ d'où l'allure de la courbe représentative ($n \geqslant 1$):



Soit β tel que $o < \beta < 1$; considérons les points d'abscisses respectives $(1 - \beta)n$, $(1 - \beta/2)n$, n, $(1 + \beta/2)n$ et $(1 + \beta)n$ comme indiqué sur la figure ci-dessus.

Comparons $\pi_n[(1 - \beta/2)n]$ et $\pi_n[(1 + \frac{\beta}{2})n]$:

$$\frac{\pi_n[(1-\beta/2)n]}{\pi_n[(1+\beta/2)n]} = \left(\frac{1-\beta/2}{1+\beta/2}\, e^{\beta}\right)^n$$

l'étude de la fonction

$$f(\beta) = \frac{1 - \beta/2}{1 + \beta/2} e^{\beta}$$

montre que

$$0 < \beta < 1 \Longrightarrow 0{,}90 < f(\beta) < 1$$

et par conséquent

$$\left[f(\beta)\right]^n = \left(\frac{1 - \beta/2}{1 + \beta/2} e^{\beta}\right)^n < 1$$

d'où l'inégalité

$$\pi_n\left[(1-\beta/2)n\right] < \pi_n\left[(1+\beta/2)n\right]$$

il en résulte

(A, 1) $$(1 - \beta/2)n \leqslant x \leqslant (1+\beta/2)n \Longrightarrow \pi_n(x) \geqslant \pi_n\left[(1-\beta/2)n\right]$$

l'égalité correspondant à x = (1 - β/2)n.

Considérons l'intégrale

$$I(n) = \int_{(1-\beta)n}^{(1+\beta)n} \pi_n(x)\,dx > \int_{(1-\beta/2)n}^{(1+\beta/2)n} \pi_n(x)\,dx$$

mais d'après (A, 1)

$$\int_{(1-\beta/2)n}^{(1+\beta/2)n} \pi_n(x)\,dx > \int_{(1-\beta/2)n}^{(1+\beta/2)n} \pi_n\left[(1-\beta/2)n\right]dx = \beta n\, \pi_n\left[(1-\beta/2)n\right]$$

d'où

(A, 2) $$I(n) > \beta n\ \pi_n\left[(1-\beta/2)n\right]$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$I_1(n) = \int_0^{(1-\beta)n} \pi_n(x)\,dx$$

sur l'intervalle considéré $\pi_n(x)$ est une fonction croissante ; donc $I_1(n)$ vérifie l'inégalité

(A,3) $$I_1(n) < \int_0^{(1-\beta)n} \pi_n[(1-\beta)n]\,dx = (1-\beta)n\,\pi_n[(1-\beta)n]$$

aussi, compte tenu de (A,2)

$$\frac{I_1(n)}{I(n)} < \frac{1-\beta}{\beta}\left[\frac{1-\beta}{1-\beta/2}\,e^{\beta/2}\right]^n$$

l'étude de la fonction

$$f_1(\beta) = \frac{1-\beta}{1-\beta/2}\,e^{\beta/2}$$

montre que

$$0<\beta<1 \quad\Longrightarrow\quad 0 < f_1(\beta) < 1$$

il existe donc n_1 tel que

(A,4) $$n > n_1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{I_1(n)}{I(n)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

le facteur 3 étant introduit pour les commodités de la démonstration.

De même, considérons l'intégrale

$$I_2(n) = \int_{(1+\beta)n}^{2n} \pi_n(x)\,dx$$

$\pi_n(x)$ étant une fonction décroissante sur l'intervalle considéré $I_2(n)$ vérifie l'inégalité

$$I_2(n) < \int_{(1+\beta)n}^{2n} \pi_n[(1+\beta)n]\,dx = (1-\beta)n\,\pi_n[(1+\beta)n]$$

aussi, compte tenu de (A,2)

$$\frac{I_2(n)}{I(n)} < \frac{1-\beta}{\beta}\left[\frac{1+\beta}{1-\beta/2}\,e^{-\frac{3}{2}\beta}\right]^n$$

l'étude de la fonction

$$f_2(\beta) = \frac{1+\beta}{1-\beta/2}\,e^{-\frac{3}{2}\beta}$$

montre que

$$0<\beta<1 \quad\Longrightarrow\quad 0{,}89 < f_2(\beta) < 1$$

par conséquent il existe n_2 tel que

(A,5) $$n > n_2 \implies \frac{I_2(n)}{I(n)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

La dernière intégrale à considérer est la suivante

$$I_3(n) = \int_{2n}^{\infty} \pi_n(x)\,dx$$

La fonction $\psi_n(x) = x^n e^{-\frac{x}{2}}$ qui passe par un maximum pour $x = 2n$, est décroissante pour $x > 2n$. Elle vérifie donc l'inégalité

$$x^n e^{-\frac{x}{2}} \leqslant (2n)^n e^{-n} \qquad (x > 0)$$

ou encore

$$\frac{x^n e^{-x}}{n!} \leqslant \frac{(2n)^n e^{-n}}{n!} e^{-\frac{x}{2}}$$

il s'en suit l'inégalité

$$I_3(n) < \int_{2n}^{\infty} \frac{(2n)^n e^{-n}}{n!} e^{-\frac{x}{2}} dx = 2\,\frac{(2n)^n}{n!} e^{-2n}$$

aussi, compte tenu de (A,2)

$$\frac{I_3(n)}{I(n)} < \frac{2}{\beta n} \left[\frac{2}{(1-\beta/2)\,e^{1+\beta/2}}\right]^n.$$

l'étude de la fonction

$$f_3(\beta) = \frac{2}{(1-\beta/2)\,e^{1+\beta/2}}$$

montre que

$$0 < \beta < 1 \implies 0{,}73 < f_3(\beta) < 0{,}90$$

et par conséquent il existe n_3 tel que

(A,6) $$n > n_3 \implies \frac{I_3(n)}{I(n)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

en définitive, d'après (A,4) (A,5) et (A,6)

$$n \geqslant \sup\{n_1, n_2, n_3\} \implies \rho_n = \frac{I_1(n) + I_2(n) + I_3(n)}{I(n)} < \varepsilon$$

ainsi, en choisissant n suffisamment grand on peut rendre le rapport ρ_n arbitrairement petit ce qui établit la propriété annoncée.

PRINCIPALES NOTATIONS

FIGURANT DANS LES TABLES ANNEXES

$\binom{a}{b} = \dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}$; $\Gamma(x)$: Fonction gamma

$A_n^{\lambda}(x) = \dfrac{x^{-\lambda}e^{x}}{n!}\left(x\dfrac{d}{dx}\right)^{n}\left(x^{\lambda}e^{-x}\right)$: Polynôme de Toscano

B_n : Nombre de Bernouilli

$B_n(x)$: Polynôme de Bernouilli

$C_n^{\nu}(x)$: Polynôme de Gegenbauer

δ : Distribution de Dirac

${}_pF_q\left(\alpha_1,\dots,\alpha_p;\beta_1,\dots,\beta_q;x\right) = \dfrac{\Gamma(\beta_1)\dots\Gamma(\beta_q)}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_p)}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma(\alpha_1+k)\dots\Gamma(\alpha_p+k)}{\Gamma(\beta_1+k)\dots\Gamma(\beta_q+k)}\dfrac{x^k}{k!}$: Fonction hypergéométrique

$\Phi(\nu,\sigma;z)$, $\nu\neq 0$: Racine de l'équation $\nu\Phi^{\sigma+1} = (\Phi^2-1)z$ vérifiant $\lim_{z\to\infty}\Phi(\nu,\sigma;z) = 1$

$\Phi(0,\sigma;z)$: Racine de l'équation $\Phi^{\sigma+1} = z\,\mathrm{Log}\,\Phi$ vérifiant $\lim_{z\to\infty}\Phi(0,\sigma;z) = 1$

$g_n^k(x)$: Polynôme de Bragg

$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$: Polynôme d'Hermite

$I_\nu(x)$: Fonction de Bessel modifiée de première espèce

$J_\nu(x)$: Fonction de Bessel de première espèce

$L_n(x) = \dfrac{e^{x}}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$: Polynôme de Laguerre

$L_n^{(m)}(x) = \dfrac{d^m}{dx^m}\left[L_n(x)\right]$

$L_n^{\lambda}(x) = \dfrac{x^{-\lambda}e^{x}}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\lambda}e^{-x}\right)$: Polynôme de Laguerre

$P_n(x) = C_n^{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$: Polynôme de Legendre

$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\dfrac{d^m}{dx^m}\left[P_n(x)\right]$, $-1 < x < +1$

$S_n(x) = \mathrm{sh}\,(n \arg \mathrm{ch}\, x)$: Fonction de Tchebycheff de seconde espèce

$T_n(x) = \mathrm{ch}\,(n \arg \mathrm{ch}\, x)$: Fonction (polynôme) de Tchebycheff de première espèce

$T_{kn}^{\delta}(x) = \frac{x^{-\delta} e^{x^k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\delta} e^{-x^k}\right)$: Polynôme de Chatterjea

$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ & \\ 1 & x>0 \end{cases}$: Fonction unité d'Heaviside

$U_n(x,y)$: Fonction de Lucas

$V_n(x,y)$: Fonction de Lucas

$y_n(x,a,b) = b^{-n} x^{2-a} e^{\frac{b}{x}} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n+a-2} e^{-\frac{b}{x}}\right)$, $b \neq 0$, $a \neq -1,-2,\cdots$: Polynôme de Bessel

$Y_n^{\delta}(x,k) = \frac{x^{-(kn+\delta+1)} e^x}{k^n n!}\left(x^{k+1}\frac{d}{dx}\right)^n\left(x^{\delta+1} e^{-x}\right)$: Polynôme de Konhauser

$Z_n^{\delta}(x,k) = \frac{\Gamma(kn+\delta+1)}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{x^{kj}}{\Gamma(kj+\delta+1)}$: Polynôme de Konhauser

Table de transformées Z

N°	f(n)	F(z)
1.	1	$\frac{z}{z-1}$
2.	a^n	$\frac{z}{z-a}$
3.	$\frac{a^n-b^n}{a-b}$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$
4.	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
5.	$n a^n$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
6.	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
7.	n^3	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
8.	$\binom{n}{k}$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$
9.	$\binom{n+\beta}{\beta}$	$\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\beta+1}$
10.	$\binom{\beta}{n}$	$\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\beta}$
11.	$\sin n\theta$	$\frac{z\sin\theta}{z^2-2z\cos\theta+1}$
12.	$\cos n\theta$	$\frac{z(z-\cos\theta)}{z^2-2z\cos\theta+1}$
13.	$\mathrm{sh}\, n\theta$	$\frac{z\,\mathrm{sh}\,\theta}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\,\theta+1}$
14.	$\mathrm{ch}\, n\theta$	$\frac{z(z-\mathrm{ch}\,\theta)}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\,\theta+1}$
15.	$a^n T_n(x)$	$\frac{z(z-ax)}{z^2-2zax+a^2}$
16.	$a^n S_n(x)$	$\frac{z\sqrt{x^2-1}}{z^2-2zax+a^2}$
17.	$U_n(x,y)$	$\frac{z}{z^2-xz+y}$
18.	$V_n(x,y)$	$\frac{z(2z-x)}{z^2-xz+y}$

N°	f(n)	F(z)
19.	$\frac{a^n}{n!}$	$e^{\frac{a}{z}}$
20.	$\frac{a^n \sin n\theta}{n!}$	$e^{\frac{a\cos\theta}{z}}\sin\left(\frac{a\sin\theta}{z}\right)$
21.	$\frac{a^n \cos n\theta}{n!}$	$e^{\frac{a\cos\theta}{z}}\cos\left(\frac{a\sin\theta}{z}\right)$
22.	$\frac{T_n(x)}{n!}$	$e^{\frac{x}{z}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{z}\sqrt{x^2-1}\right)$
23.	$\frac{S_n(x)}{n!}$	$e^{\frac{x}{z}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{z}\sqrt{x^2-1}\right)$
24.	$\frac{U_n(x,y)}{n!}$	$\left(\frac{x^2}{4}-y\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2z}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{z}\sqrt{\frac{x^2}{4}-y}\right)$
25.	$\frac{V_n(x,y)}{n!}$	$2e^{\frac{x}{2z}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{z}\sqrt{\frac{x^2}{4}-y}\right)$
26.	$\frac{a^n}{(2n)!}$	$\mathrm{ch}\sqrt{\frac{a}{z}}$
27.	$\frac{\sin n\theta}{(2n)!}$	$\mathrm{sh}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{z}}\right)\sin\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{z}}\right)$
28.	$\frac{\cos n\theta}{(2n)!}$	$\mathrm{ch}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{z}}\right)\cos\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{z}}\right)$
29.	$\frac{\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}$	$\sin\left(x+\frac{1}{z}\right)$
30.	$\frac{\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}$	$\cos\left(x+\frac{1}{z}\right)$
31.	$\binom{2n+\beta}{n}$	$\sqrt{\frac{z}{z-4}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{4}{z}}}\right)^{\beta}$
32.	$\frac{\beta}{2n+\beta}\binom{2n+\beta}{n}$	$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{4}{z}}}\right)^{\beta}$
33.	$\binom{\frac{n}{2}+\beta}{n}$	$\frac{4z^2}{4z^2+1-\sqrt{4z^2+1}}\left(\frac{2z^2}{2z^2+1-\sqrt{4z^2+1}}\right)^{\beta}$
34.	$\frac{\beta}{\frac{n}{2}+\beta}\binom{\frac{n}{2}+\beta}{n}$	$\left(1+\frac{1+\sqrt{4z^2+1}}{2z^2}\right)^{\beta}$
35.	$\binom{(\sigma+1)n+\beta}{n}$	$\frac{[\Phi(1,\sigma;z)]^{\beta+1}}{\sigma+1-\sigma\Phi(1,\sigma;z)}$
36.	$\frac{\beta}{(\sigma+1)n+\beta}\binom{(\sigma+1)n+\beta}{n}$	$[\Phi(1,\sigma;z)]^{\beta}$

Table de transformées Z (suite)

N°	f(n)	F(z)
37.	$\frac{1}{n!}\,\frac{\Gamma[(\sigma+1)n+\beta]}{\Gamma(\sigma n+\beta+\gamma)}$	$\frac{1}{\beta}\,\Phi\left(\frac{1}{\beta}, \frac{\sigma+1}{\beta}-1; \frac{z}{\beta}\right)$
38.	$\frac{(\sigma n+\beta)^{n-1}}{n!}$	$\frac{1}{\beta}\,\Phi\left(0, \frac{\sigma}{\beta}-1; \frac{z}{\beta}\right)$
39.	$\frac{1}{n+1}$	$z\,\mathrm{Log}\,\frac{z}{z-1}$
40.	$\frac{1-a^{n+1}}{n+1}$	$z\,\mathrm{Log}\,\frac{z-a}{z-1}$
41.	$\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}$	$z^{\nu/2}\,J_\nu\left(\frac{2}{\sqrt{z}}\right)$
42.	$\frac{1}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}$	$z^{\nu/2}\,I_\nu\left(\frac{2}{\sqrt{z}}\right)$
43.	$\frac{(-1)^n}{n!}\binom{n+k+\delta}{k}$	$e^{-\frac{1}{z}}\,L_k^{\delta}\left(\frac{1}{z}\right)$
44.	$L_n(x)$	$\frac{z}{z-1}\,e^{-\frac{x}{z-1}}$
45.	$L_n^{\delta}(x)$	$\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\delta+1} e^{-\frac{x}{z-1}}$
46.	$\binom{n+k}{k} L_{n+k}^{\delta}(x)$	$\left(\frac{z}{z-1}\right)^{k+\delta+1} L_k^{\delta}\left(\frac{xz}{z-1}\right) e^{-\frac{x}{z-1}}$
47.	$Y_n^{\delta}(x,k)$	$\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{\delta+1}{k}} \exp\left\{-x\left[\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{1}{k}}-1\right]\right\}$
48.	$T_{kn}^{\delta}(x)$	$\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\delta+1} \exp\left\{-x^k\left[\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{1}{k}}-1\right]\right\}$
49.	$\frac{L_n(x)}{n!}$	$e^{\frac{1}{z}}\,J_0\left(2\sqrt{\frac{x}{z}}\right)$
50.	$\frac{L_n^{(m)}(x)}{n!}$	$(-1)^m e^{\frac{1}{z}} (xz)^{-\frac{m}{2}}\,J_m\left(2\sqrt{\frac{x}{z}}\right)$
51.	$\frac{L_n^{\delta}(x)}{\Gamma(n+\delta+1)}$	$e^{\frac{1}{z}}\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{\delta}{2}} J_\delta\left(2\sqrt{\frac{x}{z}}\right)$
52.	$\frac{n!\,L_n^{\delta}(x)L_n^{\delta}(y)}{\Gamma(n+\delta+1)}$	$\frac{z}{z-1}\,e^{-\frac{x+y}{z-1}}\left(\frac{z}{xy}\right)^{\frac{\delta}{2}} I_\delta\left(\frac{2\sqrt{xyz}}{z-1}\right)$
53.	$\frac{H_n(x)}{n!}$	$e^{\frac{x}{z}-\frac{1}{2z^2}}$
54.	$\frac{g_n^k(x)}{n!}$	$e^{\frac{kz}{z}-\frac{1}{z^k}}$

N°	f(n)	F(z)
55.	$a^n P_n(x)$	$\frac{z}{\sqrt{z^2-2zax+a^2}}$
56.	$a^n P_n^{(m)}(x)$	$\frac{(2m)!\,(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,a^m\,z^{m+1}}{2^m\,m!\,(z^2-2zax+a^2)^{m+\frac{1}{2}}}$
57.	$C_n^{\nu}(x)$	$\frac{z^{2\nu}}{(z^2-2zx+1)^{\nu}}$
58.	$\frac{P_n(x)}{n!}$	$e^{\frac{x}{z}}\,J_0\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{z}\right)$
59.	$\frac{a^n P_n^{(m)}(x)}{(m+n)!}$	$e^{\frac{ax}{z}}\,J_m\left(\frac{a\sqrt{1-x^2}}{z}\right)$
60.	$\frac{C_n^{\nu}(x)}{\Gamma(n+2\nu)}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{z}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{z}}\,J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{z}\right)$
61.	$\frac{J_{n+\nu}(x)}{n!}$	$\left(1-\frac{2}{xz}\right)^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu\left(\sqrt{x^2-\frac{2x}{z}}\right)$
62.	$\frac{I_{n+\nu}(x)}{n!}$	$\left(1+\frac{2}{xz}\right)^{-\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(\sqrt{x^2+\frac{2x}{z}}\right)$
63.	$\frac{B_n}{n!}$	$\frac{1}{z(e^{\frac{1}{z}}-1)}$
64.	$\frac{B_n(x)}{n!}$	$\frac{e^{\frac{x}{z}}}{z(e^{\frac{1}{z}}-1)}$
65.	$A_n^{\delta}(x)$	$e^{\frac{\delta}{z}} \exp\left\{x\left(1-e^{\frac{1}{z}}\right)\right\}$
66.	$\frac{(b/2)^n y_n(x,a,b)}{n!}$	$\frac{2^{a-2} \exp\left\{\frac{b}{2x}\left(1-\sqrt{1-\frac{2x}{z}}\right)\right\}}{\sqrt{1-\frac{2x}{z}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2x}{z}}\right)^{a-2}}$
67.	$\frac{\Gamma(n+b)}{n!\,\Gamma(b)}\,{}_2F_1(-n,a;b;z)$	$\left(\frac{z}{z-1}\right)^b \left(\frac{z-1}{z+x-1}\right)^a$
68.	${}_2F_1(-n,a;b;x)$	$\frac{z}{z-1}\,{}_2F_1\left(1,a;b;\frac{x}{1-z}\right)$
69.	$\frac{{}_2F_1(-n,a;b;x)}{n!}$	$e^{\frac{1}{z}}\,{}_1F_1\left(a;b;-\frac{x}{z}\right)$
70.	$\frac{Z_n^{\delta}(x,2)}{\Gamma\left(n+\frac{\delta+2}{2}\right)}$	$\left(\frac{z}{x^2}\right)^{\frac{\delta}{4}}\left(\frac{z}{z-4}\right)^{\frac{\delta+2}{4}} J_{\frac{\delta}{2}}\left(\frac{2x}{\sqrt{z-4}}\right)$
71.	$\frac{Z_n^{\delta}(x,2)}{\Gamma\left(n+\frac{\delta+1}{2}\right)}$	$\left(\frac{z}{x^2}\right)^{\frac{\delta-1}{4}}\left(\frac{z}{z-4}\right)^{\frac{\delta+5}{4}} J_{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{2x}{\sqrt{z-4}}\right)$
72.	$\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(kn+\delta+1)}\,Z_n^{\delta}(x,k)$	$\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\alpha} {}_1F_k\left(\alpha; \frac{\delta+1}{k}, \ldots, \frac{\delta+k}{k}; -\frac{(x)^k}{z-1}\right)$

Table de transformées de Laguerre

N°	f(t)	$f_n(\alpha,\beta)$
1.	$\delta(t)$	β
2.	$u(t)$	$(-1)^n \frac{\beta}{\beta-\alpha}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n$ $f_0(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\beta-\alpha}$; $f_n(\alpha,\beta)=-\frac{\alpha}{\beta-\alpha} f_{n-1}(\alpha,\beta)$ $(n\geq 1)$
3.	t	$(-1)^n \frac{\beta(\beta n+\alpha)}{(\beta-\alpha)^3}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{n-1}$ $f_0(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{(\beta-\alpha)^2}$; $f_1(\alpha,\beta)=-\beta\frac{\beta+\alpha}{(\beta-\alpha)^3}$; $f_n(\alpha,\beta)=-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\left[2f_{n-1}(\alpha,\beta)+\frac{\alpha}{\beta-\alpha}f_{n-2}(\alpha,\beta)\right]$ $(n\geq 2)$
4.	t^ν	$\frac{\beta\Gamma(\nu+1)}{(\beta-\alpha)^{\nu+1}}\,{}_2F_1\left(-n,\nu+1;1;\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right)$ $f_0(\alpha,\beta)=\frac{\beta\Gamma(\nu+1)}{(\beta-\alpha)^{\nu+1}}$; $f_n(\alpha,\beta)=\frac{(\beta-2\alpha)n+\alpha-\beta(\nu+1)}{(\beta-\alpha)n}f_{n-1}(\alpha,\beta)+\frac{\alpha(n-1)}{(\beta-\alpha)n}f_{n-2}(\alpha,\beta)$ $(n\geq 1)$
5.	e^{-at}	$(-1)^n \frac{\beta}{\beta+a-\alpha}\left(\frac{\alpha-a}{\beta+a-\alpha}\right)^n$ $f_0(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\beta+a-\alpha}$; $f_n(\alpha,\beta)=-\frac{\alpha-a}{\beta+a-\alpha}f_{n-1}(\alpha,\beta)$ $(n\geq 1)$
6.	te^{-at}	$(-1)^n \frac{\beta(\beta n+\alpha-a)}{(\beta+a-\alpha)^3}\left(\frac{\alpha-a}{\beta+a-\alpha}\right)^{n-1}$ $f_0(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{(\beta+a-\alpha)^2}$; $f_1(\alpha,\beta)=-\beta\frac{\beta+\alpha-a}{(\beta+a-\alpha)^3}$; $f_n(\alpha,\beta)=-\frac{\alpha-a}{\beta+a-\alpha}\left[2f_{n-1}(\alpha,\beta)+\frac{\alpha-a}{\beta+a-\alpha}f_{n-2}(\alpha,\beta)\right]$ $(n\geq 2)$
7.	$t^\nu e^{-at}$	$\frac{\beta\Gamma(\nu+1)}{(\beta+a-\alpha)^{\nu+1}}\,{}_2F_1\left(-n,\nu+1;1;\frac{\beta}{\beta+a-\alpha}\right)$ $f_0(\alpha,\beta)=\frac{\beta\Gamma(\nu+1)}{(\beta+a-\alpha)^{\nu+1}}$; $f_n(\alpha,\beta)=\frac{(\beta+2a-2\alpha)n+\alpha-a-\beta(\nu+1)}{(\beta+a-\alpha)n}f_{n-1}(\alpha,\beta)+\frac{(\alpha-a)(n-1)}{(\beta+a-\alpha)n}f_{n-2}(\alpha,\beta)$ $(n\geq 1)$
8.	$\delta(t-\tau)$ $\tau>0$	$\beta e^{-(\beta-\alpha)\tau}L_n(\beta\tau)$ $f_0(\alpha,\beta)=\beta e^{-(\beta-\alpha)\tau}$; $f_n(\alpha,\beta)=\frac{2n-1-\beta\tau}{n}f_{n-1}(\alpha,\beta)-\frac{n-1}{n}f_n(\alpha,\beta)$ $(n\geq 1)$
9.	$u(t-\tau)$ $\tau>0$	$\frac{\beta}{\beta-\alpha}e^{-(\beta-\alpha)\tau}\left[L_n(\beta\tau)-\frac{\beta}{\beta-\alpha}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{j-1}L_{n-j}(\beta\tau)\right]$ $f_0(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\beta-\alpha}e^{-(\beta-\alpha)\tau}$; $f_n(\alpha,\beta)=\left(2-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{2+\beta\tau}{n}\right)f_{n-1}(\alpha,\beta)+\frac{2(\beta-2\alpha)-\alpha\beta\tau-(\beta-3\alpha)n}{(\beta-\alpha)n}f_{n-2}(\alpha,\beta)-\frac{\alpha(n-2)}{(\beta-\alpha)n}f_{n-3}(\alpha,\beta)$ $(n\geq 1)$
10.	$J_0(bt)$	$\frac{\beta}{\sqrt{(\beta-\alpha)^2+b^2}}\left[\frac{\alpha^2+b^2}{(\beta-\alpha)^2+b^2}\right]^{\frac{n}{2}}P_n\left(\frac{b^2-\alpha(\beta-\alpha)}{\sqrt{[(\beta-\alpha)^2+b^2][\alpha^2+b^2]}}\right)$ $f_0(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\sqrt{(\beta-\alpha)^2+b^2}}$; $f_n(\alpha,\beta)=-\frac{(2n-1)[\alpha(\beta-\alpha)-b^2]}{[(\beta-\alpha)^2+b^2]n}f_{n-1}(\alpha,\beta)-\frac{(n-1)(\alpha^2+b^2)}{[(\beta-\alpha)^2+b^2]n}f_{n-2}(\alpha,\beta)$ $(n\geq 1)$

Table de transformées de Laguerre (suite)

N°	f(t)	$f_n(\alpha,\beta)$
11.	$e^{-at}\sin\omega t$	$(-1)^n \frac{\beta}{\sqrt{(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2}} \left[\frac{(\alpha-a)^2+\omega^2}{(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2}\right]^{\frac{n}{2}} \sin\left[n\theta+(n+1)\varphi\right]$ * $f_0(\alpha,\beta)=\frac{\omega\beta}{(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2}$; $f_1(\alpha,\beta)=\frac{\omega\beta\left[(\alpha-a)^2-\beta^2+\omega^2\right]}{\left[(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2\right]^2}$; $f_n(\alpha,\beta)=\frac{2\left[\omega^2-(\alpha-a)(\beta+a-\alpha)\right]}{(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2} f_{n-1}(\alpha,\beta) - \frac{(\alpha-a)^2+\omega^2}{(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2} f_{n-2}(\alpha,\beta)$ $(n\geq 2)$
12.	$e^{-at}\cos\omega t$	$(-1)^n \frac{\beta}{\sqrt{(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2}} \left[\frac{(\alpha-a)^2+\omega^2}{(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2}\right]^{\frac{n}{2}} \cos\left[n\theta+(n+1)\varphi\right]$ * $f_0(\alpha,\beta)=\frac{\beta(\beta+a-\alpha)}{(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2}$; $f_1(\alpha,\beta)=\frac{\beta\left[(2\beta+a-\alpha)\omega^2-(\alpha-a)(\beta+a-\alpha)^2\right]}{\left[(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2\right]^2}$; $f_n(\alpha,\beta)=\frac{2\left[\omega^2-(\alpha-a)(\beta+a-\alpha)\right]}{(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2} f_{n-1}(\alpha,\beta) - \frac{(\alpha-a)^2+\omega^2}{(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2} f_{n-2}(\alpha,\beta)$ $(n\geq 2)$
13.	$e^{-at}t\sin\omega t$	$(-1)^n \frac{\beta}{\left[(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2\right]^{3/2}} \left[\frac{(\alpha-a)^2+\omega^2}{(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2}\right]^{\frac{n-1}{2}} \left\{\beta n \sin\left[(n-1)\theta+(n+2)\varphi\right]+\sqrt{(\alpha-a)^2+\omega^2}\sin\left[n\theta+(n+2)\varphi\right]\right\}$ * $f_0(\alpha,\beta)=\frac{A_0}{B_0'}$; $f_n(\alpha,\beta)=\frac{1}{B_0'}\left(A_n-\sum_{j=1}^{n} B_j' f_{n-j}(\alpha,\beta)\right)$ $(n=1,2,3)$; $f_n(\alpha,\beta)=\frac{-1}{B_0'}\sum_{j=1}^{4} B_j' f_{n-j}(\alpha,\beta)$ $(n\geq 4)$ **
14.	$e^{-at}t\cos\omega t$	$(-1)^n \frac{\beta}{\left[(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2\right]^{3/2}} \left[\frac{(\alpha-a)^2+\omega^2}{(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2}\right]^{\frac{n-1}{2}} \left\{\beta n \cos\left[(n-1)\theta+(n+2)\varphi\right]+\sqrt{(\alpha-a)^2+\omega^2}\cos\left[n\theta+(n+2)\varphi\right]\right\}$ * $f_0(\alpha,\beta)=\frac{A_0'}{B_0'}$; $f_n(\alpha,\beta)=\frac{1}{B_0'}\left(A_n'-\sum_{j=1}^{n} B_j' f_{n-j}(\alpha,\beta)\right)$ $(n=1,2,3)$; $f_n(\alpha,\beta)=\frac{-1}{B_0'}\sum_{j=1}^{4} B_j' f_{n-j}(\alpha,\beta)$ $(n\geq 4)$ **

* $\theta = \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\alpha-a}$, $0<\theta<\pi$ $(\omega>0)$; $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\beta+a-\alpha}$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ $(\omega>0,\ \beta+a-\alpha>0)$

** $A_0=2\omega\beta(\beta+a-\alpha)$ $A_1=-2\omega\beta(2\beta+3a-3\alpha)$ $A_2=2\omega\beta(\beta+3a-3\alpha)$ $A_3=2\omega\beta(\alpha-a)$

$A_0'=\beta\left[(\beta+a-\alpha)^2-\omega^2\right]$ $A_1'=\beta\left[3\omega^2-(\beta+a-\alpha)(\beta+3a-3\alpha)\right]$ $A_2'=-\beta\left[3\omega^2+(\alpha-a)(2\beta+3a-3\alpha)\right]$ $A_3'=\beta\left[\omega^2-(\alpha-a)^2\right]$

$B_0'=\left[(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2\right]^2$ $B_1'=4\left[(\beta+a-\alpha)^2+\omega^2\right]\left[(\alpha-a)(\beta+a-\alpha)-\omega^2\right]$

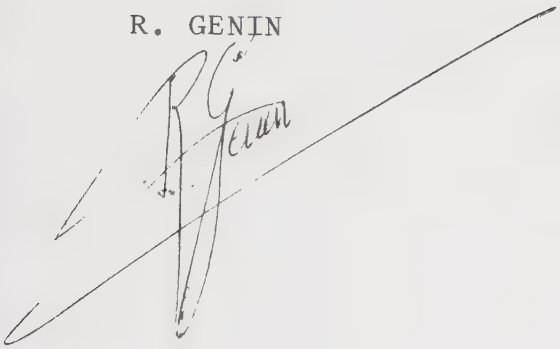
$B_2'=6\omega^4+2\omega^2\left[\beta^2-6\beta(\alpha-a)+6(\alpha-a)^2\right]+6(\alpha-a)^2(\beta+a-\alpha)^2$

$B_3'=4\left[(\alpha-a)^2+\omega^2\right]\left[(\alpha-a)(\beta+a-\alpha)-\omega^2\right]$ $B_4'=\left[(\alpha-a)^2+\omega^2\right]^2$

VU

Le Président du Jury

R. GENIN



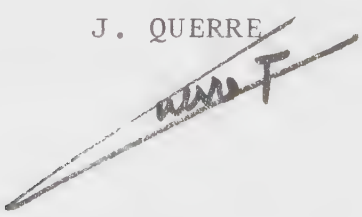
VU

Le Directeur de l'U.E.R.
Sciences de la Matière
et de la Mer de Brest

P. COURTOT

VU ET PERMIS D'IMPRIMER

Brest, le 11 septembre 1973

Le Président de l'Université
de Bretagne Occidentale

J. QUERRE